UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

ETUDE DE PROCESSUS DE DIFFUSION

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 1er juin 2001

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy I
(Spécialité Mathématique)

par

Samuel Herrmann

Composition du jury

Rapporteurs :	M. Paolo BALDI, Professeur à l'Université "Tor Vergata", Rome M. Yves LE JAN, Professeur à l'Université Paris-Sud, Orsay
Directeur de thèse :	M. Bernard ROYNETTE, Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy I
President du jury :	M. Michel LEDOUX, Professeur à l'Université Paul Sabatier, Toulouse
Examinateurs :	M. Pierre VALLOIS, Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy I M. Marc YOR, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

Institut Élie Cartan Nancy

Mis en page avec la classe TheseCRIN.

Remerciements

Durant ces dernières années, j'ai été encadré par un directeur de thèse formidable : Bernard Roynette. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa grande disponibilité et pour les sujets de recherche passionnants et variés qu'il m'a proposés. Je suis très admiratif de ses qualités humaines et mathématiques. J'espère ne jamais oublier un de ses conseils en recherche : "il ne faut jamais mettre tous ses oeufs dans le même panier".

Je tiens à remercier vivement Paolo Baldi et Yves Le Jan pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'en être rapporteurs. Je les remercie également pour les différentes remarques qu'ils m'ont fait parvenir. Leurs travaux mathématiques ont inspiré une partie de cette thèse.

Je remercie chaleureusement Pierre Vallois d'avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse. Je le remercie également de m'avoir encouragé et motivé à commencer cette aventure que représente la recherche. Il sera toujours pour moi un professeur modèle qui fait aimer les probabilités à ses étudiants.

Michel Ledoux a accepté d'être le président du jury de ma thèse : je lui en suis très reconnaissant. Il a manifesté un chaleureux intérêt pour mon travail.

Je remercie également Marc Yor qui m'a fait l'honneur de participer au jury, je lui suis d'autant plus reconnaissant que j'admire ses travaux de recherche et ses qualités humaines.

Je tiens à exprimer aussi ma profonde gratitude à Mihai Gradinaru pour les nombreuses heures de travail que nous avons pu partager mais également pour les divers conseils pratiques qui m'ont aidé à persévérer dans ce travail. J'ai une pensée toute particulière pour Florent Malrieu, qui a pris le temps de discuter avec moi à propos des processus auto-stabilisants et pour Saïd Benachour qui m'a prodigué quelques conseils bibliographiques.

Je tiens à remercier tous les collègues du laboratoires qui, de près ou de loin, m'ont aidé dans la recherche et m'ont fait découvrir de nombreuses choses intéressantes (je pense en particulier à tous les exposés instructifs que j'ai pu suivre au groupe de travail à Nancy).

C'est grâce au soutien constant et à la grande patience de ma famille que j'ai pu réaliser cette thèse. Enfin j'aimerais exprimer toute ma reconnaissance et mon respect à Dieu qui est à la base de la Science.

Je dédie cette thèse
à Claire-Lise.

Table des matières

Introduction générale

Cette thèse, effectuée sous la direction de Bernard Roynette, a pour thème l'étude de quelques équations différentielles stochastiques. Elle se développe autour de trois problèmes n'ayant que peu de liens entre eux. C'est pourquoi nous introduirons ces sujets séparément.

Le premier sujet mettra en valeur un phénomène singulier de la théorie des grandes déviations relative aux trajectoires d'une équation différentielle stochastique.

Le second établira l'existence, l'unicité ainsi que quelques autres propriétés de la solution d'un système de deux équations différentielles stochastiques non-linéaires. Nous montrerons également dans cette seconde partie que la solution du système peut être approchée par un système de particules interagissantes grâce à la propagation du chaos.

Enfin, nous présenterons une étude développée autour du comportement asymptotique des trajectoires d'une diffusion renforcée, c'est-à-dire d'une diffusion dont la dérive dépend de tout le passé. En d'autres termes cette dernière partie concernera des processus à mémoire longue.

Un principe singulier de grandes déviations

La théorie des grandes déviations a pour but d'étudier et d'estimer le comportement de certains événements rares liés à un phénomène aléatoire. Elle s'intéresse donc, en particulier, à la probabilité qu'une trajectoire d'un certain processus stochastique atteigne un domaine fixé. C'est dans cette thématique que s'inscrit l'étude qui suit. Nous considérons un système dynamique déterministe et unidimensionnel

$$x'_t = b(x_t),$$

où b est une fonction continue, auquel nous administrons une petite perturbation aléatoire : le système devient alors une équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon dB_t \\ X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où B désigne un mouvement brownien. Nous cherchons alors à déterminer le comportement de la diffusion X^ε lorsque le paramètre positif ε tend vers zéro. Le processus markovien X^ε va-t'il converger vers une solution du système dynamique déterministe? La première étude relative à ce problème remonte sans doute à 1970, date à laquelle ont été publiés les résultats de A.D.Wentzell et M.I.Freidlin concernant un système dynamique perturbé dont la fonction b est lipschitzienne ([F-W1]). Leurs résultats figurent dans de nombreux ouvrages consacrés à la théorie des grandes déviations (parmi lesquels [D-S],[D-Z],[F-W2] et [V]). En fait, ils ont établi non seulement que la diffusion tend uniformément vers l'unique solution déterministe du système dynamique sur tout intervalle $[0,T]$ fini, mais encore que la distance entre ces deux processus décroît avec une vitesse exponentielle. Plus précisément, ils ont défini sur l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}([0,T])$ la fonctionnelle

$$I_T(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T |f'(t) - b(f(t))|^2 dt \ \text{ si } \ f \in H^1 \\ \infty \ \text{ sinon,} \end{cases}$$

où H^1 désigne l'espace de Cameron-Martin, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions absolument continues. Ils ont alors montré que la loi de la diffusion X^ε suit un principe de grandes déviations de vitesse ε^2 et de bonne fonctionnelle d'action I_T. Ainsi, lorsque b est lipschitzienne, le comportement asymptotique de la diffusion est connu avec précision. Le but de notre étude est de sortir de ce cadre lipschitzien et d'apporter un résultat précis de grandes déviations.

En 1992, G. Jona-Lasinio, dans une intéressante discussion informelle, a donné la minoration des inégalités de grandes déviations avec une vitesse ε^2 pour une fonction b uniquement mesurable ([J-L]). Ce résultat ne peut cependant donner entière satisfaction puisque la fonctionnelle d'action s'annule sur tout borélien de $\mathcal{C}([0,T])$ muni de la norme uniforme qui contient au moins une solution du système dynamique. Ainsi si le système satisfait un phénomène de Peano, c'est-à-dire s'il existe une infinité de solutions issues de l'origine x, il y a un manque d'information important sur le comportement asymptotique des trajectoires sur une partie "non-négligeable" de $\mathcal{C}([0,T])$.

Sortons maintenant du cadre des grandes déviations pour signaler des résultats étonnants obtenus dans le cadre d'une fonction b non-lipschitzienne. En 1982, R.Bafico et P.Baldi, sans doute les premiers, ont considéré la perturbation de systèmes dynamiques vérifiant un phénomène de Peano ([B-B]). En étudiant la diffusion associée, ils ont mis en évidence et ont décrit les valeurs d'adhérence de la loi du processus stochastique lorsque la perturbation tend vers zéro. Ils ont montré en particulier que le support de ces valeurs d'adhérence était contenu dans l'ensemble des trajectoires des solutions extrémales (solutions quittant en premier la position d'origine).

Plaçons nous, pour la suite , dans le cas particulier où $x = 0$ et où b est une fonction impaire croissante continue et bornée vérifiant $b'(x) \sim C|x|^{\gamma-1}$ au voisinage de l'origine ($C > 0$ est une constante et $0 < \gamma < 1$). Dans ce cas, grâce à la symétrie de l'E.D.S., il existe une unique valeur d'adhérence à la loi du processus, répartie uniformément sur les trajectoires des solutions extrémales. Ainsi X^ε converge vers la solution extrémale supérieure avec la probabilité $1/2$ et converge vers la solution extrémale inférieure (opposé de la solution extrémale supérieure) avec la même probabilité $1/2$.

Nous nous attachons à montrer que, dans ce cadre, la diffusion X^ε suit un principe de grandes déviations de vitesse ε^2, avec la bonne fonctionnelle d'action I_T définie ci-dessus, sur l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}([0,T])$ muni de la norme uniforme (ce résultat est identique à celui rencontré dans la théorie de Freidlin et Wentzell, bien que la démonstration en soit différente). Comme ce résultat ne donne aucune information sur les boréliens contenant une solution du système dynamique, nous étudions également la probabilité que X^ε appartienne à un voisinage d'une telle solution déterministe. Evidemment, si ce voisinage contient au moins une des deux solutions extrémales, l'événement n'est pas rare. Dans le cas contraire, nous mettons en évidence un phénomène singulier de grandes déviations puisque cette probabilité tend vers zéro de façon exponentielle, avec la vitesse $\varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}$.

Cette description du comportement du processus stochastique lorsque son coefficient de diffusion tend vers zéro, repose sur une étude de la densité du processus par rapport à la mesure de Lebesgue, étude faite en collaboration avec MM. Gradinaru et Roynette et présentée également dans la première partie de cette thèse. La densité de la diffusion a le comportement asymptotique suivant:

- si $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un point qui appartient au domaine contenu strictement entre les deux trajectoires extrémales, alors la densité de X^ε en ce point décroît de façon exponentielle à la vitesse $\varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}$;
- si, par contre, (t,x) est strictement à “l'extérieur” des trajectoires extrémales, alors la densité de X^ε décroît de façon exponentielle à la vitesse ε^2.

La démonstration de ce résultat repose tant sur des arguments probabilistes (transformation de Girsanov, formule d'Itô, grandes déviations du mouvement brownien,...) que sur des arguments analytiques (spectre d'opérateurs, solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi).

Pour plus d'informations concernant les résultats obtenus, il est conseillé de lire directement l'introduction située au début de la première partie. Elle décrit de manière plus précise, à l'aide de formules, les différentes convergences énonçées. Signalons également que l'idée de ce problème a pris naissance au cours d'une discussion entre MM. Ouknine et Roynette sur la route de Ouarzazate.

Système de processus autostabilisants non linéaires

La seconde partie de cette thèse se concentre sur l'étude d'un système de deux équations définissant des processus autostabilisants. En d'autres termes, nous étudions un système de deux E.D.S. non linéaires. Pour introduire le problème considéré, nous avons besoin de quelques définitions. Soient $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire et croissante, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire et bornée, $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements browniens indépendants tels que $B_0 = \tilde{B}_0 = 0$, et une constante $1/2 \leq a < 1$. Nous nous intéressons alors au système d'équations suivant :

$$(E) \quad \begin{cases} X_t = X_0 + B_t + a \displaystyle\int_0^t \phi * v_s(X_s)ds - (1-a) \int_0^t \beta * u_s(X_s)ds \\ Y_t = Y_0 + \tilde{B}_t + (1-a) \displaystyle\int_0^t \phi * u_s(Y_s)ds - a \int_0^t \beta * v_s(Y_s)ds \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_t \in dx) = u_t(dx) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_t \in dx) = v_t(dx),$$

où le produit de convolution est défini de la manière suivante

$$\beta * u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \beta(x-y)u_t(dy).$$

La non linéarité de ce système repose essentiellement sur le fait que les termes de dérive dépendent des lois de X et de Y : les deux équations sont donc couplées. Nous étudions dans un premier temps l'existence et l'unicité des solutions d'un tel système d'E.D.S., puis le comportement de ces processus stochastiques lorsque le temps tend vers l'infini : nous montrons alors que la solution (X_t,Y_t) se stabilise, c'est-à-dire qu'elle converge en loi vers la distribution stationnaire. Lorsque $a \neq 1/2$ le problème ne peut se reduire à l'étude d'une seule équation différentielle. Nous montrons en particulier que les lois limites de X et Y sont clairement distinctes.

Cette étude est motivée par la considération du système de particules stochastiques suivant :

$$(F) \left\{ \begin{aligned} X_t^{i,N_n} &= X_0^i + B_t^i - \frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n} \beta(X_s^{i,N_n} - X_s^{j,N_n})ds \\ &\quad + \frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^{i,N_n} - Y_s^{k,M_n})ds \quad 1 \le i \le N_n, \\ Y_t^{i,M_n} &= Y_0^i + \tilde{B}_t^i - \frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} \beta(Y_s^{i,M_n} - Y_s^{j,M_n})ds \\ &\quad + \frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{k=1}^{N_n} \phi(Y_s^{i,M_n} - X_s^{k,N_n})ds, \quad 1 \le i \le M_n. \end{aligned} \right.$$

N_n et M_n sont, ici, deux suites d'entiers tendant vers l'infini quand $n \to \infty$, $(B^1,..,B^{N_n})$ et $(\tilde{B}^1,..,\tilde{B}^{M_n})$ sont des mouvements browniens indépendants de dimensions respectives N_n et M_n. Les particules de ce système sont de deux natures différentes et leur interaction dépend de leur nature : deux particules de même nature s'attirent et deux particules de nature différente se repoussent. Lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, nous observons qu'il y a un phénomène de propagation de chaos. Ainsi les $(X_t^{i,N_n},Y_t^{i,M_n})$ sont asymptotiquement indépendantes et convergent vers la loi du couple de processus non-linéaire (X_t,Y_t), solution de (E).

Les processus auto-stabilisants ont déjà fait l'objet de plusieurs études. En particulier, S. Benachour, B. Roynette, D. Talay et P. Vallois ([B-R-T-V] et [B-R-V]) ont considéré l'E.D.S.

$$(EE) \left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + B_t - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \beta * u(s,X_s)ds \\ \mathbb{P}(X_t \in dx) = u(t,dx). \end{array} \right.$$

Dans l'équation non-linéaire (EE), le mouvement brownien, qui est un processus non convergent, est perturbé par une dérive non linéaire et non bornée, ce qui permet de montrer que le processus se stabilise à la limite. Par ailleurs les auteurs ont montré que la solution de cette E.D.S. pouvait également être approchée par un système infini de particules, par un phénomène de propagation du chaos. Ce travail a largement inspiré cette partie de la thèse.

Signalons également que Y. Tamura ([T1], [T2]) avait auparavant analysé une équation semblable à (EE) en considérant une E.D.S. dirigée par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (qui converge en loi quand le temps tend vers l'infini) et dont la dérive non-linéaire est bornée. La bornitude remplace le caractère rentrant de la fonction β.

Mentionnons enfin un travail effectué par M. Deaconu et S. Wantz concernant un processus non-linéaire auto-stabilisant réfléchi ([D-W]). Elles ont décrit les solutions de l'équation :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \beta * u(s,X_s)ds - k_t \\ \mathbb{P}(X_t \in dx) = u(t,dx), X_t \in [-1,1] \\ |k|_t = \displaystyle\int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s)d|k|_s, k_t = \int_0^t n(X_s)d|k|_s. \end{cases}$$

Ici, n est le vecteur unitaire sortant aux extrémités de l'intervalle $[-1,1]$,

$$n(x) = \mathrm{sgn}(x).\mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x).$$

Dans cette équations figurent trois inconnues : le couple de processus $\{(X_t,k_t), t \geq 0\}$ et la famille de probabilités $(u(t,.), t \geq 0)$. M. Deaconu et S. Wantz étudient alors le comportement asymptotique de ce processus stochastique et montrent que, même dans le cas réfléchi, le processus se stabilise en convergent vers sa loi d'équilibre (mesure invariante).

Etude de quelques diffusions renforcées

Le but de cette dernière partie est de présenter une étude, faite en collaboration avec B. Roynette, sur le comportement asymptotique, quand le temps tend vers l'infini, des solutions de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dZ_t = dB_t - \left(\displaystyle\int_0^t \Phi(Z_t - Z_s)ds\right) dt \\ Z_0 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où B désigne un mouvement brownien unidimensionnel et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire mesurable bornée, vérifiant $\Phi(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Dans cette équation la dérive à l'instant t dépend de tout le passé de la solution de l'E.D.S.: il s'agit donc d'une équation à mémoire longue. Cette recherche a été motivée par l'étude des marches aléatoires renforcées, c'est-à-dire des marches aléatoires dont la loi à l'instant $n \in \mathbb{N}$ dépend de tout le passé de la façon suivante : le marcheur cherche à retourner là où il a passé le plus de temps. Ce genre de processus a déjà été étudié par plusieurs auteurs tels que MM. Benaïm, Bienvenüe, Diaconis, Davis, Pemantle, Tóth, Volkov...(voir, par exemple, [B], [D], [P], [P-V]). Un article a particulièrement retenu notre attention : il s'agit de l'étude du comportement asymptotique de la marche aléatoire renforcée par les sommets, étude conduite par R. Pemantle et S. Volkov ([P-V]). Les auteurs montrent que les trajectoires de ces marches aléatoires sont presque sûrement bornées. Plus précisément, si $R = \{k : X_n = k \text{ pour un certain } n\}$ est le support aléatoire du processus, alors $\mathbb{P}(|R| = 5) > 0$ et $\mathbb{P}(|R| < \infty) = 1$. Ils décrivent, de plus, le comportement asymptotique de manière précise. Ce résultat très intéressant nous a motivé à observer ce qui se passe dans le cas continu : les trajectoires de la diffusion à mémoire longue (1) sont-elles convergentes ? Sont-elles bornées ? La comparaison entre l'équation que nous avons considérée et le cas discret s'arrête au niveau de cette motivation puisque la dérive de l'E.D.S. (1) en un certain point dépend de la mesure d'occupation de Z dans tout l'espace ($\mathbb{R}$) et non seulement dans un voisinage du point considéré (positions voisines pour le cas discret).

Dans le cas des processus continus, le comportement de certains processus dont la dérive dépend de toute la trajectoire passée a déjà fait l'objet de plusieurs études. Citons, dans le contexte des diffusions auto-évitantes, les travaux de J.R. Norris, L.C.G. Rogers, D. Williams ([N-R-W]) et de R.T. Durrett et L.C.G. Rogers ([D-R]). Les premiers ont étudié le comportement de la solution de

$$X_t = B_t + \int_0^t ds \int_0^s du\, f(X_s - X_u),$$

avec B un mouvement brownien d dimensionnel et $f(x) = \psi(x)x/\|x\|$ où $\psi(x) \geq 0$. Les seconds se sont concentrés sur le cas, en dimension 1, de l'équation

$$X_t = B_t - \int_0^t g(X_s,L(s,X_s))ds,$$

où L désigne le temps local de la diffusion X. Dans les deux cas, les auteurs ont considéré le rapport X_t/t et ont cherché à borner les limites supérieure et inférieure lorsque le temps tend vers l'infini, ou à prouver la convergence presque sûre de cette expression.

Les autres diffusions à mémoire longue qui ont été considérées jusqu'ici sont les diffusions renforcées, c'est-à-dire les solutions de l'E.D.S. (1). Cette équation fait déjà l'objet de plusieurs études dans le cas de fonctions Φ particulières. M. Cranston et Y. Le Jan ont décrit le comportement asymptotique des trajectoires dans deux cas particuliers ([C-LJ]).

- Le premier concerne la fonction $\Phi(x) = ax$, avec $a > 0$ une constante. La solution de l'E.D.S. s'écrit alors de façon explicite sous forme d'intégrale stochastique ce qui permet aux auteurs d'en déduire la convergence presque sûre des trajectoires de la diffusion lorsque le temps tend vers l'infini.
- Le second cas considéré est celui de l'interaction "constante" pour une E.D.S. unidimensionnelle, c'est-à-dire $\Phi(x) = a\mathrm{sgn}(x)$. Même si, dans ce cas, la solution n'est pas explicite, les auteurs montrent quand même la convergence presque sûre des trajectoires grâce à des principes de comparaison. O. Raimond ([Ra]) étend ce dernier résultat au cas d'une diffusion dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ en considérant l'interaction constante : $\Phi(x) = ax/\|x\|$.

Le but de cette partie de la thèse est d'étendre les résultats de convergence (dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle) à des interactions plus générales. En fait, nous montrons que, si Φ est une fonction croissante, alors, sous des hypothèses très faibles, les trajectoires convergent presque sûrement. Les conditions imposées à la fonction d'interaction exigent un certain comportement au voisinage de l'origine. En effet, nous supposons qu'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P_k de degré $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} P_k(x) = +\infty$ tels que, au voisinage de l'origine,

$$|\Phi(x)| \geq C \exp -P_k\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{2}$$

Ce résultat n'est évidemment pas optimal, cependant, la condition est relativement faible. Pour démontrer la convergence des trajectoires, il suffit en fait de reprendre la plupart des arguments fournis par M. Cranston et Y. Le Jan. Dans le cas d'une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la même méthode ne marche plus car la monotonie globale (sur tout $\mathbb{R}$) est un argument fondamental de la preuve. Ainsi, nous n'obtenons, dans ce dernier cas, que la bornitude presque sûre des trajectoires.

Puisque la condition (2) est faible, nous avons cherché à comprendre ce qui se passe lorsque l'interaction n'est pas locale, c'est-à-dire lorsque la fonction Φ s'annule dans un voisinage de l'origine. Pour cela, nous avons considéré l'équation (1) avec la fonction d'interaction $\Phi(x) = \mathrm{sgn}(x)\mathbb{1}_{\{|x|\geq a\}}$ où $a > 0$. M. Cranston et Y. Le Jan avaient déjà fait remarquer que, presque sûrement, les trajectoires de telles solutions ne convergent pas. Le comportement dans ce cas limite est donc bel et bien complètement différent. Nous montrons en fait que, même si les trajectoires ne convergent pas, elles restent bornées presque sûrement. Ce résultat repose sur des principes de comparaison ainsi que sur l'étude du temps passé par une diffusion dans un certain intervalle.

Références

[B] M. Benaïm, *Vertex-reinforced random walks and a conjecture of Pemantle*, Ann. Probab. **25** pp.361-392, 1997

[B-B] R. Bafico et P. Baldi, *Small Random Perturbations of Peano Phenomena*, Stochastics, **6**, (1982), pp. 279-292.

[B-R-T-V] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay et P. Vallois, *Nonlinear self-stabilizing processes - I Existence, invariant probability, propagation of chaos*, Stochastic Processes and their Applications 75, pp. 173-201, 1998.

[B-R-V] S. Benachour, B. Roynette et P. Vallois, *Nonlinear self-stabilizing processes - II: Convergence to invariant probability*, Stochastic Processes and their Applications 75, pp. 203-224, 1998.

[C-LJ] M. Cranston et Y. Le Jan, *Self-attracting diffusions : Two case studies*, Math. Ann.,**303** (1995), 87-93.

[D] B. Davis, *Reinforced Random Walks*, Prob. Theory Rel. Fields, **84**, pp.203-229, 1990

[D-R] R. Durrett et L.C.G. Rogers, *Asymptotic behavior of Brownian Polymers*, Prob. Theory Rel. Fields, **92**, pp.337-349, 1991

[D-S] J. D. Deuschel et D. W. Stroock, *Large Deviations*, Academic Press, 1989

[D-W] M. Deaconu et S. Wantz, *Processus non-linéaire auto-stabilisant réflechi*, Bulletin des Sciences Mathématiques, **122**, pp.521-569, 1998

[D-Z] A.Dembo et O.Zeitouni, *Large deviations techniques and applications*, Jones and Barlett books in Mathematic, (1993)

[F-W1] M.I. Freidlin et A.D. Wentzell, *On small perturbations of dynamical systems*, Russian Math. Surveys, **25**, pp.1-55, 1970

[F-W2] M.I. Freidlin et A.D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems* Springer-Verlag, New-York, 1984

[J-L] G. Jona-Lasinio, *Large Deviations for Weak Solutions of Stochastic Differential Equations*, Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics, and applications (Oslo, 1988), pp. 162-167 Cambridge Univ-Press, Cambridge, 1992.

[N-R-W] J.R. Norris, L.C.G. Rogers and D. Williams, *Self-avoiding Random Walk: a Brownian Motion Model with Local Time Drift*, Probab. Th. Rel. Fields, **74** (1987), pp. 271-287.

[P] R. Pemantle, *Vertex Reinforced Random Walk*, Probab. Theor. Relat. Fields, **92**, pp.117-136, 1992

[P-V] R. Pemantle et S.Volkov, *Vertex-reinforced random walk on $\mathbb{Z}$ has finite range*, Ann. Probab., **27** (1999) no.3, pp. 1368-1388.

[Ra] O. Raimond, *Self Attracting Diffusions : Case of the constant interaction*, Probab. Theor. Relat. Fields **107**, (1996), 177-196.

[T1] Y. Tamura, *On asymptotic behaviors of the solution of a non linear diffusion equation*, J. Fac. Sciences Univ. Tokyo. Section IA Math. 31, p.195-221, (1984).

[T2] Y. Tamura, *Free energy and the convergence of distribution of diffusion processes of McKean type*, J. Fac. Sciences Univ. Tokyo. Section IA Math. 34, p.443-484, (1987).

[V] S.R.S. Varadhan, *Large Deviations and Applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, **46**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1984.

Première partie

Un Principe singulier de Grandes Déviations

Introduction

Considérons sur $[0,T]$ l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \varepsilon dB_t + \mathrm{b}(X_t^\varepsilon)dt \\ X_0^\varepsilon = 0. \end{cases} \tag{1}$$

où b est une fonction continue et B est un mouvement brownien unidimensionnel. Si b est une fonction lipschitzienne, alors la solution X^ε converge uniformément sur $[0,T]$ lorsque $\varepsilon \to 0$ vers l'unique solution du système dynamique suivant

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{b}(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

De plus, Freidlin et Wentzell ont étudié la vitesse de convergence sous la forme d'un principe de Grandes Déviations (cf par exemple [F-W], chapitre 5.6 de [D-Z], chapitre 1.4 de [D-S], section 6 de [V]). Avant de poursuivre, introduisons quelques notations ainsi que la définition d'une fonctionnelle d'action.
Soit χ un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_\chi$.
Définition 1 *Une fonctionnelle d'action I est une fonction semi-continue inférieurement $I : \chi \to [0,+\infty]$. Une fonctionnelle d'action est dite bonne si pour tout α, $\{x : I(x) \leq \alpha\}$ est un compact de χ.*
Freidlin et Wentzell ont montré que X^ε suit un PGD dans $\mathcal{C}([0,T])$ de vitesse ε^2 avec la bonne fonctionnelle d'action

$$I_T(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |f'(t) - b(f(t))|^2 dt \text{ , si } f \in H^1 \\ \infty \quad \text{sinon,} \end{cases} \tag{3}$$

où H^1 désigne l'espace de Cameron-Martin, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[0,T]$. En d'autres termes, si P_ε est la loi de X^ε, alors pour tout borélien Γ de $(\mathcal{C}([0,T]),\|.\|_\infty)$, on obtient l'encadrement

$$-\inf_{x\in\Gamma^\circ} I_T(x) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln P^\varepsilon(\Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln P^\varepsilon(\Gamma) \leq -\inf_{x\in\bar{\Gamma}} I_T(x). \tag{4}$$

La démonstration repose essentiellement sur la continuité de l'application $\theta \in \mathcal{C}([0,T]) \mapsto Y(\theta)$ définie par

$$Y(t,\theta) = \theta(t) + \int_0^t b(Y(s,\theta))ds, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Cette continuité permet d'appliquer un principe de contraction mettant en relation le PGD de la diffusion X^ε à celui du mouvement brownien, lequel est mis en évidence par le théorème de Schilder. Il est donc impératif pour cette démonstration que l'équation (5) admette une unique solution, ce qui est vérifié lorsque b est une fonction lipschitzienne.
Le but de ce chapitre est d'étendre ce résultat de Grandes Déviations aux diffusions dont la dérive n'est pas lipschitzienne. G.Jona-Lasinio a déjà donné, sous la forme d'une discussion informelle [J-L], des estimations du type de celles de Freidlin et Wentzell pour une équation différentielle stochastique avec dérive mesurable, mais ses résultats sont clairement plus faibles que les estimations habituelles.

Pour la suite, nous allons considérer que b satisfait aux conditions suivantes :

(H1) b est une fonction continue impaire croissante, $b' \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$ et b^{-1} est intégrable au voisinage de 0.

(H2) il existe $0<\gamma<1$ et $C>0$ tels que $b'(x) \sim C\gamma|x|^{\gamma-1}$ au voisinage de l'origine.

Sous les conditions de continuité de b, la famille $\{P_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est étroitement relativement compacte quand ε tend vers zéro. De plus, toute valeur d'adhérence P a son support contenu dans l'ensemble des trajectoires des solutions du système dynamique (2). Ce résultat manque évidemment de précision puisque, sous la condition (H1), le système dynamique vérifie le phénomène de Peano. En d'autres termes, il existe une infinité de solutions non constantes à l'équation (2). Pourtant Bafico et Baldi ont montré que sous la condition (H1), il existe une unique valeur d'adhérence P dont le support est l'ensemble des trajectoires des solutions extrémales de (2), la solution extrémale supérieure (resp. inférieure) étant la solution qui quitte en premier l'intervalle $]-\infty,\delta]$ (resp. $[-\delta,+\infty[$) pour $\delta > 0$.
Le but de ce chapitre est de donner des estimations de la vitesse de convergence de P_ε en termes de Grandes Déviations.
Nous étudierons dans une première partie à quelle vitesse la densité $p_t^\varepsilon(x)$ de X_t^ε tend vers zéro pour (t,x) n'appartenant pas à la trajectoire d'une solution extrémale de l'équation (2). Nous mettrons alors en évidence un phénomène particulier : la vitesse dépend fortement de la position de (t,x), en ce sens qu'il apparaît deux vitesses différentes dans les Grandes Déviations. Plus précisément, si le point (t,x) est tel que $|x| > K^{-1}(t)$, où K^{-1} est la fonction réciproque de $\int_0^x \frac{dy}{b(y)}$, il existe une fonction strictement positive k_t telle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x) = -k_t(|x|).$$

Ceci signifie que, dans le domaine cité, la densité décroît de façon exponentielle à la vitesse ε^2, comme dans la théorie de Freidlin et Wentzell pour des perturbations aléatoires de systèmes dynamiques.
Par contre, pour (t,x) appartenant au domaine situé entre les trajectoires des deux solutions extrémales, i.e. $|x| < K^{-1}(t)$, la décroissance exponentielle de la densité a pour vitesse $\varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}$. Plus précisément, nous montrerons que, pour de tels points (t,x),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{2(1-\gamma)}{(1+\gamma)}} \ln p_t^\varepsilon(x) = \lambda_1\left(K(|x|)-t\right).$$

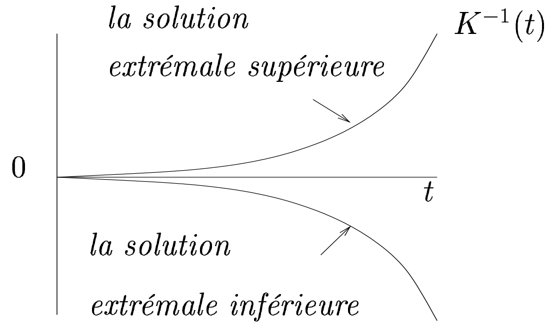

FIG. 1 – *Solutions du système dynamique*

où λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger :

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{C\gamma}{2|x|^{1-\gamma}}+\frac{C^2|x|^{2\gamma}}{2}.$$

Dans une seconde partie nous exposerons un principe de Grandes Déviations fonctionnel. En d'autres termes, si b est bornée et strictement croissante, nous démontrerons que P_ε la loi de X^ε vérifie les estimations (4). De plus, si φ est une solution non extrémale du système dynamique, alors il existe $\delta>0$ tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}\ln \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^\varepsilon-\varphi(t)|\leq\delta\right)=\lambda_1(K(|\varphi(T)|+\delta)-T)$$

Ainsi, si le Borélien considéré dans la formule (4) ne contient aucune solution du système dynamique (voir Figure 2), la probabilité pour que X^ε appartienne à ce Borélien décroît de façon exponentielle avec une vitesse de l'ordre de ε^2. Par contre, si le Borélien contient une solution, deux cas se présentent : soit cette solution est une solution extrémale et, dans ce cas, la probabilité d'appartenir à ce Borélien ne tend pas vers 0 puisque la solution en question appartient au support de la loi limite P, soit le Borélien ne contient aucune des solutions extrémales et alors la probabilité que X^ε appartienne à cet ensemble tend vers zéro de façon exponentielle avec pour vitesse $\varepsilon^{2(1-\gamma)/1+\gamma}$.

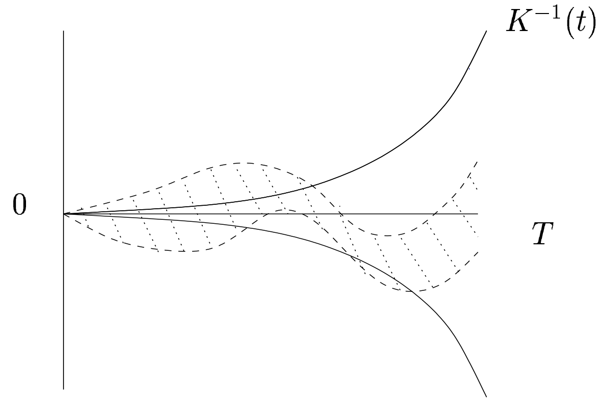

FIG. 2 – *Borélien* Γ

Chapitre 1

Principe de Grandes Déviations pour la densité

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un principe singulier de Grandes Déviations pour une diffusion de coefficient $\varepsilon > 0$ et de dérive b, où b vérifie les hypothèses (H1) et (H2). Le cas particulier $b(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$ a fait l'objet d'une prépublication [G-H-R]. Dans tout ce chapitre, nous faisons les preuves dans le cas $b(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^\gamma$, et nous discutons de leurs extensions au cas d'une fonction b vérifiant (H1) et (H2).
Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la première section nous rappelons quelques résultats d'existence de solutions d'E.D.S et E.D.O. ainsi que les résultats de Bafico et Baldi [B-B] concernant la dérive b. De plus, nous donnons quelques représentations de la densité p_t^ε. Nous développons, en particulier, la densité en série de termes dépendants des valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur de Schrödinger. Ce genre de développement a déjà été étudié par Kac [K] pour des potentiels continus, et nous adaptons ce résultat à notre situation. La deuxième section est consacrée à la convergence de la densité en vitesse logarithmique ε^2. Nous calculons la limite pour les points (t,x) qui ne sont pas situés entre les trajectoires extrémales (voir Théorème 1), et nous donnons une majoration pour les autres points. Dans les deux dernières sections, nous étudions la convergence de la densité en vitesse logarithmique $\varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}$ pour les points (t,x) situés entre les deux trajectoires extrémales. Une majoration est obtenue dans la section 1.3, pour une dérive particulière $b(x) = \mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$, en utilisant des arguments de Grandes Déviations (voir Théorème 2). En particulier, nous obtenons le comportement de

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2/3} \ln \mathbb{E} \left[\exp -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |b_s| \, ds \right], 0 < t < 1,$$

où $\{b_s : s \in [0,1]\}$ est un pont brownien standard (voir Proposition 9). La limite précise est obtenue dans le Théorème 4 par l'étude (développée dans la section 1.4) de solution de viscosité d'une équation de Hamilton-Jacobi. Les idées sont inspirées du livre de Barles [B], mais, ici, nous sommes en présence de difficultés nouvelles : b, par exemple, n'est pas lipschitzien.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Résultats d'existence

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats d'existence pour l'E.D.S

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \varepsilon\, dB_t + \operatorname{sgn}(X_t^\varepsilon)|X_t^\varepsilon|^\gamma dt \\ X_0^\varepsilon = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

pour l'E.D.O.

$$\begin{cases} x_t' = \operatorname{sgn}(x_t)|x_t|^\gamma \\ x_0 = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

et de convergence (voir [B-B]).

Proposition 1 *Il existe une unique solution forte de* 1.1. *De plus, pour toute fonction Borélienne f, $\mathbb{E}[f(X_t^\varepsilon)]$ est égal à*

$$\mathbb{E}\left[f(\varepsilon B_t)\exp\left\{\frac{|B_t|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^{1-\gamma}} - \frac{\gamma}{2\varepsilon^{1-\gamma}}\int_0^t |B_s|^{\gamma-1}ds - \frac{1}{2\varepsilon^{2-2\gamma}}\int_0^t |B_s|^{2\gamma}ds\right\}\right] \tag{1.3}$$

Preuve :
Les résultats d'existence, d'unicité faible et de non-explosion sont des conséquences du théorème de Girsanov et du critère de Novikov (qui est satisfait ici puisque $\gamma < 1$). L'unicité trajectorielle est une conséquence de la Proposition 3.2 dans [R-Y] p. 370. En appliquant le théorème de Girsanov, on a

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f(B_t)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^{1-\gamma}}\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)|B_s|^\gamma dB_s - \frac{1}{2\varepsilon^{2-2\gamma}}\int_0^t |B_s|^{2\gamma}ds\right\}\right],$$

et ainsi (1.3) résulte de la formule d'Itô-Tanaka (grâce à la convexité) et de la formule d'occupation. **QED**

On étudie maintenant le système dynamique (1.2) et le comportement, quand $\varepsilon \to 0$, de la loi P_ε du processus $X_\cdot^\varepsilon$:

Proposition 2 *L'équation* (1.3) *admet une infinité de solutions :*

$$\left\{c_\gamma(t-\lambda)_+^{1/1-\gamma}, \lambda \geq 0\ ;\ -c_\gamma(t-\lambda)_+^{1/1-\gamma}, \lambda \geq 0\right\}$$

où c_γ est une constante. On note

$$\rho_{1,2}(t) = \pm\{(1-\gamma)t\}^{1/1-\gamma}$$

les solutions extrémales du système dynamique. Alors P_ε tend vers $\frac{1}{2}\delta_{\rho_1} + \frac{1}{2}\delta_{\rho_2}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve : Le résultat d'existence est évident. Par le Théorème 5.2 dans [B-B], p. 291 on a : si P est une valeur d'adhérence $\{P_\varepsilon\}$, quand $\varepsilon \to 0$, alors P est concentré sur les trajectoires des solutions extrémales ρ_1 et ρ_2:

$$P = \frac{1}{2}\delta_{\rho_1} + \frac{1}{2}\delta_{\rho_2}.$$

QED

1.1.2 Cas particulier : $\gamma = 0$

On note que, dans le cas $\gamma = 0$, les calculs sont explicites : on calcule la densité et on montre que la diffusion tend vers les solutions extrémales (les solutions de l'E.D.O. étant généralisées i.e. différentiables) de l'E.D.O. suivante

$$\begin{cases} x'_t = \operatorname{sgn}(x_t) \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

qui sont $\rho_{1,2}(t) = \pm t$. Dans ce cas particulier, la diffusion $X^\varepsilon_.$ est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX^\varepsilon_t = \varepsilon dB_t + \operatorname{sgn}(X^\varepsilon_t)dt \\ X^\varepsilon_0 = 0, \end{cases} \qquad (1.1')$$

et on obtient une expression de la densité $p^\varepsilon_t(x)$ de X^ε_t par rapport à la mesure de Lebesgue :
Proposition 3 *Soit $\varphi(x) = \int_x^\infty e^{-y^2/2}dy$. Alors,*

$$p^\varepsilon_t(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp - \left\{ \frac{(|x|-t)^2}{2\varepsilon^2 t} \right\} - \frac{1}{\varepsilon^2\sqrt{2\pi}} \varphi\left(\frac{|x|}{\varepsilon\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}}{\varepsilon} \right) \exp \frac{2|x|}{\varepsilon^2}. \qquad (1.4)$$

De plus, quand $\varepsilon \to 0$,

$$p^\varepsilon_t(x) \sim \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \left(1 - \frac{t}{(|x|+t)}\right) \exp - \frac{(|x|-t)^2}{2\varepsilon^2 t}, \quad si \quad x \neq 0,$$

$$p^\varepsilon_t(x) \sim \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp - \frac{t}{2\varepsilon^2}, \quad si\ x = 0.$$

En particulier, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon_t(x) = - \frac{(|x|-t)^2}{2t}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(||X^\varepsilon_t| - t| \geq \delta) = - \frac{\delta^2}{2t}.$$

Preuve : Par le théorème de Girsanov et la formule d'Itô-Tanaka, on obtient

$$\mathbb{E}[f(X^\varepsilon_t)] = \mathbb{E}\left[f(\varepsilon|B_t|) \exp\left\{ \frac{|B_t|}{\varepsilon} - \frac{2L_t}{\varepsilon} - \frac{t}{2\varepsilon^2} \right\} \right],$$

où f est une fonction Borélienne paire (on peut se restreindre aux fonctions paires puisque $-X^\varepsilon$ est également solution de (1.1')) et L_t est le temps local en 0 du mouvement brownien. Par ailleurs, par le théorème de Lévy, $(|B_t|,2L_t)$ a la même loi que $(S_t - B_t, S_t)$, où $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$. Ainsi

$$\mathbb{E}[f(X^\varepsilon_t)] = \mathbb{E}\left[f(\varepsilon(S_t - B_t)) \exp\left\{ -\frac{B_t}{\varepsilon} - \frac{t}{2\varepsilon^2} \right\} \right].$$

Or la loi du couple (B_t,S_t) est connue (voir, par exemple, [K-S] Proposition 8.1, p. 95):

$$\mathbb{P}(B_t \in da, S_t \in db) = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(2b-a)^2}{2t}\right\} dadb, \text{ pour } a \leq b \quad, b \geq 0.$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[f(X_t^\varepsilon)] = \int_0^\infty \int_{-\infty}^b \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(2b-a)^2}{2t} - \frac{a}{\varepsilon} - \frac{t}{2\varepsilon^2}\right\} f(\varepsilon(b-a))dadb.$$

Par le changement de variables $x := \varepsilon(2b-a)$ et $y := \varepsilon(b-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_t^\varepsilon)] &= \frac{2}{\varepsilon^3\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty \int_y^\infty x \exp\left\{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2 t} + \frac{2y}{\varepsilon^2} - \frac{x}{\varepsilon^2} - \frac{t}{2\varepsilon^2}\right\} f(y)dxdy \\
&= \frac{2}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty f(y) \exp\left\{\frac{2y}{\varepsilon^2} - \frac{(y+t)^2}{2\varepsilon^2 t}\right\} dy \\
&\quad - \frac{2}{\varepsilon^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left(\int_{(y+t)/(\varepsilon\sqrt{t})}^\infty \exp -\frac{v^2}{2}dv\right) f(y) \exp \frac{2y}{\varepsilon^2}dy
\end{aligned}$$

L'expression de la densité (1.4) est issue de cette dernière égalité. De plus, par la méthode de Laplace, on obtient les équivalents de l'énoncé de la proposition. **QED**

1.1.3 Quelques représentations de la densité

Dans ce paragraphe, on décrit quelques représentations de la densité de X_t^ε, solution de l'équation (1.1), pour $0 < \gamma < 1$.

Proposition 4 *Pour $t > 0, \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
p_t^\varepsilon(x) &= \tfrac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\tfrac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \tfrac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right\} \\
&\times \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\gamma t}{2}\int_0^1 |xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s|^{\gamma-1}ds - \frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 |xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s|^{2\gamma}ds\right\}\right],
\end{aligned} \tag{1.5}$$

où $\{b_t : t \in [0,1]\}$ est un pont brownien standard.

Remarque 1 *On peut étendre cette proposition pour b vérifiant (H1) sans difficulté. On obtient alors*

$$\begin{aligned}
p_t^\varepsilon(x) &= \tfrac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\tfrac{G(|x|)}{\varepsilon^2} - \tfrac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right\} \\
&\times \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{t}{2}\int_0^1 b'(xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s)ds - \frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 b^2(xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s)ds\right\}\right],
\end{aligned} \tag{1.6}$$

où $G(x) = \int_0^x b(y)dy$.

Preuve de la Proposition 4: Par (1.3) dans la Proposition 1 et par la propriété de changement d'échelle du mouvement brownien, on obtient

$$\mathbb{E}[f(X_t^\varepsilon)] = \mathbb{E}\left[f(\varepsilon\sqrt{t}B_1) \exp\left\{\frac{t^{(\gamma+1)/2}}{(\gamma+1)\varepsilon^{1-\gamma}}|B_1|^{\gamma+1}\right.\right.$$

$$-\frac{\gamma t^{(\gamma+1)/2}}{2\varepsilon^{1-\gamma}}\int_0^1 |B_s|^{\gamma-1}ds - \frac{t^{\gamma+1}}{2\varepsilon^{2-2\gamma}}\int_0^1 |B_s|^{2\gamma}ds\Big\}\Big].$$

On décompose le mouvement brownien comme suit :

$$B_t = g\,t + b_t,$$

où g est une variable aléatoire Gaussienne standard indépendante du pont brownien b. Aussi,

$$\mathbb{E}[f(X_t^\varepsilon)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\varepsilon\sqrt{t}y)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{t^{(\gamma+1)/2}}{(\gamma+1)\varepsilon^{1-\gamma}}|y|^{\gamma+1} - \frac{y^2}{2}\right\} dy$$

$$\times\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\gamma t^{(\gamma+1)/2}}{2\varepsilon^{1-\gamma}}\int_0^1 |ys+b_s|^{\gamma-1}ds - \frac{t^{\gamma+1}}{2\varepsilon^{2-2\gamma}}\int_0^1 |ys+b_s|^{2\gamma}ds\right\}\right].$$

Par le changement de variable $x = \varepsilon\sqrt{t}y$, la formule ci-dessus devient

$$\mathbb{E}[f(X_t^\varepsilon)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right\}$$

$$\times\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\gamma t}{2}\int_0^1 |xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s|^{\gamma-1}ds - \frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 |xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s|^{2\gamma}ds\right\}\right] dx$$

ce qui entraîne l'expression de la densité (1.5). **QED**

Une autre expression utile de la densité est contenu dans le corollaire suivant :
Corollaire 1 *Pour $t>0$, $\varepsilon>0$ et $x\in\mathbb{R}$, la densité $p_t^\varepsilon(x)$ est égale à*

$$\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right\}\mathbb{E}_{\frac{x}{\varepsilon(s(\varepsilon))^{1/2}}}\left[\exp\left\{-\int_0^{t/s(\varepsilon)}\frac{V(B_s)}{2}ds\right\}\middle| B_{\frac{t}{s(\varepsilon)}} = 0\right] \quad (1.7)$$

où on note $s(\varepsilon) := \varepsilon^{(2(1-\gamma))/(1+\gamma)}$ et V le potentiel donné par

$$V(x) := \frac{\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + |x|^{2\gamma}. \quad (1.8)$$

Preuve: Conditionnant par rapport à $\{B_t = x\}$ dans (1.3), on obtient

$$\mathbb{E}[f(X_t^\varepsilon)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} f(\varepsilon x)\exp\left\{\frac{1}{(\gamma+1)\varepsilon^{1-\gamma}}|x|^{\gamma+1} - \frac{x^2}{2t}\right\} dx$$

$$\times\mathbb{E}_0\left[\exp-\left\{\frac{\gamma}{2\varepsilon^{1-\gamma}}\int_0^t |B_s|^{\gamma-1}ds - \frac{1}{2\varepsilon^{2-2\gamma}}\int_0^t |B_s|^{2\gamma}ds\right\}\middle| B_t = x\right].$$

La fonctionnelle du mouvement brownien qui apparaît dans l'intégrale du second membre de l'égalité précédente est invariante par renversement du temps. On obtient ainsi

$$\mathbb{E}_0\left[\exp-\left\{\frac{\gamma}{2\varepsilon^{1-\gamma}}\int_0^t |B_s|^{\gamma-1}ds - \frac{1}{2\varepsilon^{2-2\gamma}}\int_0^t |B_s|^{2\gamma}ds\right\}\middle| B_t = x\right]$$

$$= \mathbb{E}_x \left[\exp - \left\{ \frac{\gamma}{2\varepsilon^{1-\gamma}} \int_0^t |B_s|^{\gamma-1} ds - \frac{1}{2\varepsilon^{2-2\gamma}} \int_0^t |B_s|^{2\gamma} ds \right\} \middle| B_t = 0 \right]$$

Par la propriété de changement d'échelle, on parvient à la formule (1.7). **QED**

Le résultat suivant contient un développement en série de la densité de X_t^ε en termes de valeurs et fonctions propres d'un opérateur de Schrödinger. Ce type d'expression a déjà été considéré par Kac [K], p. 194 pour des potentiels continus.

Proposition 5 *1) Pour $t > 0$, $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:*

$$p_t^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} \right\} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_j t}{s(\varepsilon)}} \psi_j(0) \psi_j \left(\frac{|x|}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \right), \tag{1.9}$$

où λ_j et ψ_j sont les valeurs propres et fonctions propres normalisées dans $L^2(\mathbb{R})$ de l'opérateur :

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}V(x),$$

V étant donné par (1.8). De plus, la série est uniformément convergente à t fixé et pour x appartenant à un ensemble compact de $\mathbb{R}$.
2) la multiplicité de λ_1 est égale à 1 et la fonction propre correspondante est strictement positive $\psi_1(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve :1) On considère le semi-groupe à un paramètre suivant

$$(T_t f)(x) := \mathbb{E}_x \left[f(B_t) \exp -\frac{1}{2} \int_0^t V(B_s) ds \right],$$

et on note $a_t(x,y)$ la densité de ce semi-groupe par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$a_t(x,y) := \frac{e^{-(x-y)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \mathbb{E}_x \left[\exp -\frac{1}{2} \int_0^t V(B_s) ds \middle| B_t = y \right].$$

Ainsi, en utilisant (1.7), on peut écrire

$$p_t^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} \right\} a_{\frac{t}{s(\varepsilon)}} \left(0, \frac{x}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \right).$$

On remarque que, par définition, le semi-groupe T_t préserve la positivité. Par ailleurs, le générateur infinitésimal de $T_t = e^{-Ht}$ est $-H$, où H est un opérateur auto-adjoint positif. En effet, cette propriété est vérifiée par tous les semi-groupes de contraction auto-adjoints (voir, [D2] Théorème 4.6, p. 99) et on peut montrer

$$\|T_t\|_{L^2(\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R})} \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_x \left[\exp -\frac{1}{2} \int_0^t V(B_s) ds \right] \le 1,$$

puisque $V(\cdot) \ge 0$ (voir, par exemple, [Ca], p. 271).
On sait (voir [D-S] Lemma 2.1 p. 339) que la densité d'un semi-groupe, vérifiant toutes

les hypothèses précédentes et étant un opérateur à trace, peut se développer de la façon suivante

$$a_t(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}\psi_j(x)\psi_j(y).$$

Ici les λ_j et les ψ_j sont les valeurs propres et les fonctions propres normalisées du spectre discret de l'équation

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{1}{2}V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x).$$

De plus, la convergence de cette série est uniforme sur tous les compacts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Pour obtenir le résultat (1.9), il reste donc à montrer que T_t est un opérateur à trace. Or,

$$a_t(x,x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t |x + b_s^{0,t}|^{2\gamma} ds\right] =: \tilde{a}_t(x,x), \tag{1.10}$$

où $b_s^{0,t}$ est le pont brownien allant de 0 à 0 sur $[0,t]$ (ainsi le pont brownien standard correspond à $b_s = b_s^{0,1}$) et $\tilde{a}_t(x,y)$ est la densité du semi-groupe généré par l'opérateur de Schrödinger

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\tilde{V}(x), \text{ avec } \tilde{V}(x) := |x|^{2\gamma}.$$

Puisque $\tilde{V} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to\infty} \tilde{V}(x)/|x|^\gamma = +\infty$, on peut en déduire que l'opérateur est à trace (voir aussi [D1] Théorème 3.2, p. 488). Par le théorème de Mercer (voir, par exemple, [R-S1], p. 65), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{a}_t(x,x)dx < \infty,$$

et alors, par (1.10),

$$\int_{\mathbb{R}} a_t(x,x)dx < \infty.$$

En utilisant une nouvelle fois le théorème de Mercer, on déduit que T_t est un opérateur à trace.
2) T_t est un semigroupe de contraction irréductible: soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$, $\{f \in L^2(\mathbb{R}) | f = 0 \text{ sur } \mathcal{B}^c\}$ est invariant à gauche pour T_t alors, modulo un ensemble de mesure nulle $\mathcal{B} = \emptyset$ ou $\mathbb{R}$. Or la première valeur propre non nulle d'un semigroupe de contraction irréductible est de multiplicité 1 et la fonction propre associée est strictement positive sauf sur un ensemble de mesure nulle (voir [R-S2] p.202). Or comme

$$\psi_1(x) = e^{\lambda_1 t}\mathbb{E}_x\left[\psi_1(B_t)\exp -\frac{1}{2}\int_0^t V(B_s)ds\right],$$

on en déduit que $\psi_1(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. **QED**

Remarque 2 *Dans le cas particulier $\gamma = 1/2$ on trouve un équivalent de $\psi_j(x)$:*

$$\psi_j(x) \sim \exp\{-\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x}\lambda_j\}, \ \textit{quand} \ x \to \infty.$$

On peut alors penser que $\varepsilon^{2/3}\ln p_t^\varepsilon(x)$ tend vers $\lambda_1(2\sqrt{|x|} - t)$, si (t,x) appartient au domaine contenu entre les trajectoires extrémales $\rho_{1,2}(t) = \pm t^2/4$ (ici $s(\varepsilon) = \varepsilon^{2/3}$).

La seconde partie de la remarque peut être démontrée dans le cas simple suivant $x = \varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}$ et pour tout $0 < \gamma < 1$:

Corollaire 2 *Pour $t > 0$, $0 < \gamma < 1$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) = -\lambda_1 t. \tag{1.11}$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve: Par (1.9), on a

$$p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) = \frac{1}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \exp\left\{\frac{1}{(\gamma+1)}\right\} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_j t}{s(\varepsilon)}} \psi_j(0)\psi_j(1)$$

Comme V est minoré, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\text{pour tout } j \geq 1, \quad \|\psi_j\|_\infty \leq K\|\psi_j\|_2$$

(voir [D1] Lemme 3.1, p. 488). Par la Proposition 5 2) et en utilisant les théorèmes de convergence classiques, on a

$$p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) = \frac{1}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \exp\left\{\frac{1}{(\gamma+1)} - \frac{\lambda_1 t}{s(\varepsilon)}\right\} (\psi_1(0)\psi_1(1) + o(s(\varepsilon)))$$

on obtient alors le résultat annoncé. Il n'est pas difficile de modifier cette preuve pour obtenir la convergence uniforme. **QED**

On observe maintenant la généralisation de ce résultat pour la diffusion (1) avec une dérive b vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). On utilise les mêmes notations pour la densité bien que celle-ci soit différente de celle du Corollaire précédent.

Proposition 6 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour $t > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) = -\lambda_1 t, \tag{1.12}$$

où λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger lié au potentiel

$$V(x) := \frac{C\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + C^2|x|^{2\gamma}. \tag{1.13}$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$.

preuve La preuve repose sur un argument d'encadrement. En utilisant le résultat (1.6) de la remarque 1 et par un raisonnement analogue à celui de la preuve du Corollaire 1, on obtient une expression de la densité

$$\begin{aligned} p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) &= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{G(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2})}{\varepsilon^2} - \frac{s(\varepsilon)}{2t}\right\} \\ &\times \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{V}(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2}\right], \end{aligned}$$

où G est la primitive de b et

$$\tilde{V}(x) = b'(\varepsilon x) + \frac{b^2(\varepsilon x)}{\varepsilon^2}.$$

Or comme $b'(x) \sim C\gamma |x|^{\gamma-1}$ au voisinage de 0 et que $b(0) = 0$, il existe $\eta > 0$ et deux constantes $C_1 \leq 1$, $C_2 \geq 1$ proches de 1 telles que, pour $|\varepsilon x| \leq \eta$,

$$\frac{C\, C_1^{1+\gamma}\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + C^2 C_1^{2+2\gamma} \frac{|x|^{2\gamma}}{\varepsilon^2} \leq \tilde{V}(x) \leq \frac{C\, C_2^{1+\gamma}\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + C^2 C_2^{2+2\gamma} \frac{|x|^{2\gamma}}{\varepsilon^2},$$

ce qui entraîne (en notant χ la fonction caractéristique),

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s| \leq \eta \right) \exp -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{V}(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s| \leq \eta \right) \exp -\frac{1}{2}\int_0^t C_1^2 V(C_1 B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right]. \qquad (1.14) \end{aligned}$$

On obtient la minoration en remplaçant C_1 par C_2. On montre tout d'abord, par les Grandes Déviations, que le fait d'introduire une indicatrice sous l'espérance ne change pas la limite. Pour cela on considère R une fonction positive. On a alors la décomposition suivante

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s| \leq \eta \right) \exp -\int_0^t R(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp -\int_0^t R(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right] \\ & -\mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s| > \eta \right) \exp -\int_0^t R(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Or, pour ε assez petit, le second terme du membre de droite est majoré en valeur absolue par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s| \geq \eta \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right) & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s^t + s\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}/t| \geq \eta \right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s^t| \geq \eta/2 \right), \end{aligned}$$

où B_s^t est un pont brownien prenant la valeur 0 en t. Ainsi, en appliquant le principe de Grandes Déviations du pont brownien, on obtient une décroissance exponentielle de vitesse ε^2 uniformément en t sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$. On montre alors que

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon) \ln \mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{s\in[0,t]} |\varepsilon B_s| \leq \eta \right) \exp -\int_0^t R(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right] \\ & = \limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon) \ln \mathbb{E}\left[\exp -\int_0^t R(B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.14) on en déduit donc

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\ln p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\ln \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t C_1^2 V(C_1 B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2}\right].$$

La minoration est vraie également en remplaçant C_1 par C_2.
Par ailleurs, par une démonstration identique à celle de la Proposition 5, on obtient la décomposition sous forme de série, pour $i \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}}\exp -\frac{s(\varepsilon)}{2t}\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t C_i^2 V(C_i B_s)ds \,\middle|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2}\right]\\ &= \frac{C_i^2}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{C_i^2\lambda_j t}{s(\varepsilon)}}\psi_j(0)\psi_j(C_i),\end{aligned}$$

où λ_j et ψ_j sont les valeurs propres et les fonctions propres normalisées dans $L^2(\mathbb{R})$ de l'équation

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi_j(x) + \frac{1}{2}V(x)\psi_j(x) = \lambda_j\psi_j(x),$$

avec V défini par (1.13). On en déduit alors

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\ln p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) \leq -C_1^2\lambda_1 t,$$

et

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\ln p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) \geq -C_2^2\lambda_1 t.$$

En faisant tendre les deux constantes vers 1, on obtient (1.12). La convergence uniforme provient de la convergence uniforme de la Proposition 5, puisque nous avons raisonné par encadrement. QED

1.2 Convergence de $\varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x)$

Le but de cette section est d'étudier le comportement de $\varepsilon^2\ln p_t^\varepsilon(x)$. Le résultat sera optimal lorsque (t,x) ne sera pas situé entre les deux trajectoires des solutions extrémales de (1.2).

Théorème 1 *Si $|x| > \{t(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}$, alors il existe une fonction strictement positive k_t telle que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2\ln p_t^\varepsilon(x) = -k_t(|x|). \tag{1.15}$$

Remarque 3 *Nous montrons également que, si $|x| \leq \{t(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}$, alors*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2\ln p_t^\varepsilon(x) \leq 0, \tag{1.16}$$

mais ce résultat sera amélioré dans la section 4.

Preuve du Théorème 1: De manière évidente, par (1.5) on peut écrire

$$p_t^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right\} \mathbb{E}\left[\exp\left(-F(\varepsilon b) - \frac{J(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right)\right],$$

où

$$F(\varepsilon b) = \frac{\gamma t}{2}\int_0^1 |xu - \sqrt{t}\varepsilon b_u|^{\gamma-1} du$$

et

$$J(\varepsilon b) = \frac{t}{2}\int_0^1 |xu - \sqrt{t}\varepsilon b_u|^{2\gamma} du.$$

i) (une majoration de $\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x)$)
On a

$$p_t^\varepsilon(x) \leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right\} \mathbb{E}\left[\exp -\frac{J(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right] =: r_t^\varepsilon(x).$$

La fonctionnelle J est une fonction continue minorée du pont brownien. Aussi, pour étudier $r_t^\varepsilon(x)$, on utilise le principe de Varadhan (voir, par exemple [De-S], p. 43). Ainsi, en prenant le logarithme, on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x) \leq \frac{|x|^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{2t} - \frac{1}{2}\inf_{\phi\in H_0^1} A(\phi),$$

où, pour $\phi \in H_0^1$,

$$A(\phi) := t\int_0^1 |xu - \sqrt{t}\phi(u)|^{2\gamma} du + \int_0^1 \phi'^2(u) du. \tag{1.17}$$

Ici

$$H_0^1 := \left\{\phi(t) = \int_0^t f(s)ds : f \in L^2([0,1]) \text{ et } \phi(1) = 0\right\},$$

muni de la norme

$$\|\phi\|_{H_0^1} := \left(\int_0^1 |\phi'(s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

On calcule le minimum de la fonctionnelle A :

Proposition 7 *Il existe une fonction strictement positive k_t telle que*

$$\inf_{\phi\in H_0^1} A(\phi) = \begin{cases} \frac{2|x|^{1+\gamma}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{t}, & si\ |x| \leq \{t(1-\gamma)\}^{1/(1-\gamma)} \\ \frac{2|x|^{1+\gamma}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{t} + 2k_t(|x|), & sinon. \end{cases} \tag{1.18}$$

On termine la preuve du théorème et on décale la démonstration de la Proposition 7. Par (1.18), on déduit (1.16) et

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x) \leq -k_t(|x|).$$

ii) (une minoration de $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x)$)
On remarque juste que F explose quand (t,x) est situé entre les trajectoires extrémales. Dans la suite, on suppose que $x > \{t(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}$. On note $\kappa := \frac{1}{2}(x - \sqrt{t}\phi_0'(0)) > 0$, où ϕ_0 est la fonction qui minimise la fonctionnelle A (voir la preuve de la Proposition 7 ci-dessous). On déduit de la preuve de la Proposition 7 que ϕ_0 appartient à l'ensemble ouvert suivant

$$\mathcal{U} := \{\phi \in \mathcal{C}([0,1]) : xu - \sqrt{t}\phi(u) > \kappa\, u, \forall u \in [0,1]\}.$$

Par ailleurs, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\max_{\phi\in\mathcal{U}} F(\phi) \leq \eta.$$

Soit $\delta > 0$ et soit $\mathcal{V}$ un voisinage de ϕ_0 tel que

$$\max_{\phi\in\mathcal{V}} J(\phi) \leq J(\phi_0) + \delta.$$

Notons alors $\mathcal{W} := \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{E}\left[\exp - \left(F(\varepsilon b) + \frac{J(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right)\right] \\
&\geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{E}\left[\exp - \left(F(\varepsilon b) + \frac{J(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right) \mathbb{1}_{\{\varepsilon b \in \mathcal{W}\}}\right] \\
&\geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\varepsilon b \in \mathcal{W}) - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \eta - \max_{\phi\in\mathcal{W}} J(\phi).
\end{aligned}$$

Par le théorème de Schilder (voir par exemple [D-S], p 18), on obtient

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{E}\left[\exp - \left(F(\varepsilon b) + \frac{J(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right)\right] &\geq -\inf_{\phi\in\mathcal{W}\cap H_0^1} \frac{1}{2}\int_0^1 |\phi'(u)|^2 du - J(\phi_0) - \delta \\
&\geq -\frac{1}{2}A(\phi_0) - \delta.
\end{aligned}$$

Quand on fait tendre δ vers zéro, on a

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x) \geq \frac{|x|^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{2t} - \frac{1}{2}\inf_{\phi\in H_0^1} A(\phi).$$

En utilisant l'expression de l'infimum (1.18), on obtient la limite (1.16) de l'énoncé du Théorème 1. Ceci termine la preuve du Théorème 1, sauf pour la démonstration de la Proposition 7. **QED**

Preuve de la Proposition 7: On remarque tout d'abord qu'on peut se restreindre au cas $x \geq 0$. En effet, si $x \leq 0$, il suffit de remplacer b_u par $-b_u$ dans (1.5) pour obtenir le résultat, puisqu'ils sont de même loi.
i) Soit $\phi \in H_0^1$. On définit (voir figure 1.1).

$$a = \sup\left\{0 \leq u \leq 1 : \phi(u) = \frac{xu}{\sqrt{t}}\right\}.$$

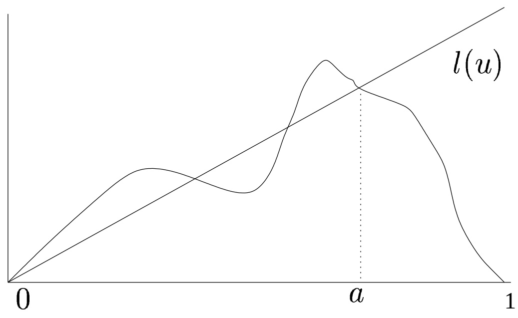

FIG. 1.1 – *Description de a*

Il est évident que, sur [0,1], la droite $l(s) := xs/\sqrt{t}$ minimise la fonctionnelle

$$\phi \mapsto \int_0^1 |xs - \sqrt{t}\phi(s)|^{2\gamma} ds.$$

D'autre part

$$\int_0^a \phi'^2(u)du \geq \frac{ax^2}{t} = \int_0^a (l'(u))^2 du, \ \forall \phi \in H_0^1.$$

En effet

$$\frac{ax}{\sqrt{t}} = \phi(a) = |\int_0^a \phi'(u)du| \leq \sqrt{a} \left(\int_0^a \phi'^2(u)du \right)^{1/2}.$$

ii) Montrons qu'il existe $\phi_0 \in H_0^1$ tel que $A(\phi_0) = \inf A(\phi)$. Prenons une suite minimisante ϕ_n de A. Comme cette suite est bornée dans H_0^1, il existe une sous-suite, toujours notée ϕ_n, faiblement convergente vers une certaine fonction ϕ_0. On en déduit la convergence ponctuelle de ϕ_n vers ϕ_0, et ainsi, par le théorème de Lebesgue, la convergence de la première partie de $A(\phi_n)$ vers la première partie de $A(\phi_0)$. Parallèlement, on obtient la convergence de la norme L^2 de ϕ'_n vers celle de ϕ'_0. Cette convergence combinée avec la convergence faible entraîne la convergence. Ainsi $A(\phi_n)$ tend vers $A(\phi_0)$ qui réalise en fait le minimum.
Par **i)** on sait que sur [0,a], $\phi_0 = l$. On remarque aussi que

$$\phi_0(u) < l(u) \ \text{ pour tout } \ u \in]a,1]. \tag{1.19}$$

Pour tout $h \in H_0^1$ à support compact dans $]a,1]$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} A(\phi_0 + \lambda h) \right|_{\lambda=0} = 0$$

(cette différentiation est permise puisque, pour $u \in]a,1]$, $xu - \sqrt{t}\phi_0(u) > 0$).
Par (1.17) et (1.18), on obtient

$$\int_0^1 \gamma t^{\frac{3}{2}} |xu - \sqrt{t}\phi_0(u)|^{2\gamma - 1} h(u)du - \int_0^1 \phi'_0(u)h'(u)du = 0. \tag{1.20}$$

On note $y(u) := xu - \sqrt{t}\phi_0(u) > 0$. Alors, d'après (1.19), y vérifie l'équation différentielle : $y''(u) = \gamma t^2 y^{2\gamma-1}(u)$ sur $]a,1]$, dans un sens faible, avec $y(a) = 0$ et $y(1) = x$ (grâce à la continuité de y). Ainsi y vérifie, dans un sens faible,

$$\frac{d(y')^2}{du} = 2y'y'' = 2y'(\gamma t^2 y^{2\gamma-1}) = 2\gamma t^2 y^{2\gamma-1} y'.$$

Aussi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}(y'(u))^2 &= (y'(a+\varepsilon))^2 + 2\gamma t^2 \int_{a+\varepsilon}^{u} y(x)^{2\gamma-1} y'(x)dx \\ &= (y'(a+\varepsilon))^2 + t^2 y(u)^{2\gamma} - t^2 y(a+\varepsilon)^{2\gamma}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Cette équation implique que y' peut être prolongée par continuité sur $[a,1]$.
iii) On montre que, pour $a > 0$, y vérifie :

$$u = a + \frac{y(u)^{1-\gamma}}{t(1-\gamma)} \quad \text{pour tout} \quad u \in [a,1]. \tag{1.22}$$

Pour cela, on a besoin de calculer $y'(a+)$. On suppose que $y'(a+) > 0$. $|y(u)|^{2\gamma-1}$ est alors intégrable au voisinage de a et ainsi la formule (1.20) s'étend à tout h. Tout ceci implique que la dérivée seconde de y est une fonction. Or $y'(a-) = 0$, ce qui contredit l'inégalité $y'(a+) > 0$. Ainsi $y'(a+) = 0$ et par (1.21) nous obtenons

$$y'(u)^2 = t^2 y(u)^{2\gamma}$$

c'est-à-dire

$$u = a + \int_{y(a)}^{y(u)} \frac{dx}{tx^\gamma} = a + \frac{y(u)^{1-\gamma}}{t(1-\gamma)}.$$

Finalement, puisque $y(1) = x$, on a en prenant $u = 1$

$$a = 1 - \frac{x^{1-\gamma}}{t(1-\gamma)}, \tag{1.23}$$

et alors la condition $a > 0$ correspond à

$$x < \{t(1-\gamma)\}^{1/(1-\gamma)}.$$

En d'autres termes, (t,x) est situé entre les trajectoires des solutions extrémales.
iv) On peut alors calculer le minimum de A

$$\inf A(\phi) = A(\phi_0) = A(y(\cdot)/\sqrt{t} - l(\cdot)) =$$

$$t\int_0^1 |xu - \sqrt{t}\phi_0(u)|^{2\gamma}du + \int_0^1 \phi_0'^2(u)du = \frac{x^2 a}{t} + t\int_a^1 |xu - \sqrt{t}\phi_0(u)|^{2\gamma}du + \int_a^1 \phi_0'^2(u)du,$$

puisque $\phi_0(u) = l(u)$ sur [0,a]. Ainsi

$$\begin{aligned}A(\phi_0) &= \frac{x^2 a}{t} + t\int_a^1 y(u)^{2\gamma}du + \int_a^1 \frac{(x-y'(u))^2}{t}du \\ &= \frac{x^2 a}{t} + t\int_a^1 y(u)^{2\gamma}du + \frac{x^2(1-a)}{t} - \frac{2x}{t}\int_a^1 y'(u)du + \frac{1}{t}\int_a^1 y'^2(u)du.\end{aligned}$$

Utilisant (1.22), on obtient :

$$A(\phi_0) = \frac{x^2}{t} + 2t \int_a^1 \{t(1-\gamma)(u-a)\}^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} du - 2x \int_a^1 \{t(1-\gamma)(u-a)\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} du,$$

qui peut s'écrire, grâce au changement de variable $v = t(1-\gamma)(u-a)$ et grâce à (1.23), de la manière suivante

$$A(\phi_0) = \frac{x^2}{t} + \frac{2}{1-\gamma} \int_0^{x^{1-\gamma}} v^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} dv - \frac{2x}{t(1-\gamma)} \int_0^{x^{1-\gamma}} v^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} dv.$$

On obtient ainsi la première partie de (1.18) après avoir effectué quelques calculs simples.

v) On suppose maintenant que $a = 0$ ce qui signifie, par **iii)**, que :

$$x \geq (t(1-\gamma))^{1/(1-\gamma)}.$$

Comme dans **iii)**, la solution du problème (1.21) vérifie

$$y'(u)^2 = t^2 y(u)^{2\gamma} + y'(0)^2. \tag{1.24}$$

Par contre, dans le cas (a=0), on n'obtient aucune valeur explicite de $y'(0)$, (contrairement à **iii)**).

vi) On calcule alors le minimum de A

$$\begin{aligned} \inf A(\phi) = A(\phi_0) &= t \int_0^1 y(u)^{2\gamma} du + \int_0^1 \frac{(x - y'(u))^2}{t} du \\ &= \frac{2}{t} \int_0^1 y'(u)^2 du - \frac{y'(0)^2}{t} - \frac{x^2}{t}. \end{aligned}$$

Comme y est strictement positive sur]0,1], y' ne s'annule pas grâce à l'équation différentielle (1.24) et est donc strictement positive. Aussi est-il permis d'appliquer le changement de variable suivant

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y'(0)^2 + t^2 y^{2\gamma}}}, \tag{1.25}$$

et on obtient

$$A(\phi_0) = \frac{2}{t} \int_0^x \sqrt{y'(0)^2 + t^2 y^{2\gamma}} dy - \frac{y'(0)^2}{t} - \frac{x^2}{t}.$$

Après quelques lignes de calculs relativement simples, on a

$$\begin{aligned} A(\phi_0) &= \frac{2x\sqrt{y'(0)^2 + t^2 x^{2\gamma}}}{(1+\gamma)t} + \frac{(\gamma-1)y'(0)^2}{(1+\gamma)t} - \frac{x^2}{t} \\ &= \frac{2x^{\gamma+1}}{1+\gamma} - \frac{x^2}{t} + 2k_t(x), \end{aligned}$$

où

$$t(1+\gamma)k_t(x) := x\sqrt{y'(0)^2 + t^2 x^{2\gamma}} - tx^{1+\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2} y'(0)^2.$$

On montre alors que $k_t(x) > 0$.
Par le changement de variable (1.25), on obtient

$$1 = \int_0^x \frac{du}{dy} dy = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y'(0)^2 + t^2 y^{2\gamma}}}.$$

Il s'ensuit que $y'(0)$, en temps que fonction de x, est strictement croissante et dérivable pour $x \geq \{t(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}$. De plus, la dérivée est égale à

$$\frac{\gamma y'(0)}{x + (\gamma - 1)\sqrt{y'(0)^2 + t^2 x^{2\gamma}}} \geq 0.$$

Ainsi, nous pouvons calculer la dérivée $k_t'(x)$ pour $x > \{t(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}$:

$$k_t'(x) = \frac{1}{t}(\sqrt{y'(0)^2 + t^2 x^{2\gamma}} - t x^\gamma) > 0, \ \text{car } y'(0) > 0.$$

On remarque que $k_t(\{t(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}) = 0$ par **iv)** et que $k_t'(x)$ est strictement positif pour $x > \{t(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}$. On en déduit que $k_t(x) > 0$.
Ceci termine la preuve de la seconde partie de (1.18). **QED**

On peut montrer, par une méthode strictement identique à celle de la preuve du Théorème 1 et à celle de la Proposition 7, que ce résultat se généralise à la diffusion (1) dans le cas où b vérifie la condition (H1) :

Théorème 2 *Sous la condition (H1) et pour $|x| > K^{-1}(t)$, il existe une fonction strictement positive k_t telle que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln p_t^\varepsilon(x) = -k_t(|x|).$$

On rappelle que K^{-1} est la fonction reciproque de $\int_0^x \frac{dy}{b(y)}$. La preuve de ce théorème repose sur le fait que b soit croissante ($b' \geq 0$ implique qu'on peut oublier ce terme dans la majoration) et continue. Elle repose également sur la proposition suivante

Proposition 8 *Soit*

$$\tilde{A}(\phi) := t \int_0^1 b^2(xu - \sqrt{t}\phi(u))du + \int_0^1 \phi'^2(u)du.$$

Il existe alors une fonction strictement positive k_t telle que

$$\inf_{\phi \in H_0^1} \tilde{A}(\phi) = \begin{cases} 2G(|x|) - \frac{x^2}{t}, & si\ |x| \leq K^{-1}(t) \\ 2G(|x|) - \frac{x^2}{t} + 2k_t(|x|), & sinon, \end{cases}$$

où $G(x) = \int_0^x b(y)dy$.

1.3 Etude du cas particulier $b(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$

Dans ce paragraphe, nous obtenons une majoration de $\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2/3} \ln p_t^\varepsilon(x)$, pour (t,x) situé entre les trajectoires des solutions extrémales.

Théorème 3 *Pour* $|x| \leq t^2/4$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2/3} \ln p_t^\varepsilon(x) \leq a_1'(t/2 - \sqrt{|x|}), \tag{1.26}$$

où a_1' *est le plus grand zéro négatif de la dérivée de la fonction de Airy Ai.*

Remarque 4 *On connaît la valeur de* a_1' *qui est égale à :* $a_1' = -1.01879297...$ *(voir, par exemple, [A-S], p. 172). On remarque que, dans le Théorème, on n'a qu'une inégalité puisque dans la preuve, on majore par* 1 *le facteur singulier suivant*

$$\exp\left\{-\frac{t}{4}\int_0^1 |xs + \varepsilon\sqrt{t}b_s|^{-1/2}ds\right\}$$

dans l'expression (1.5) de la densité p_t^ε*. Dans la section 1.4 on améliore ce résultat en donnant explicitement la limite de* $\varepsilon^{2/3}\ln p_t^\varepsilon(x)$ *et donc également la constante précise qui remplace* a_1'*.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise un résultat concernant une fonctionnelle du pont brownien standard $\{b_u, u \in [0,1]\}$, qui est intéressant en lui-même :

Proposition 9 *Pour* $0 \leq a < 1$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2/3} \ln \mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^a |b_u| du\right] = \frac{a_1' a}{2^{1/3}}\,. \tag{1.27}$$

Preuve de la Proposition 9 Soit $B_t^{x,\delta}$ un pont brownien allant de 0 à x sur $[0,\delta]$. Par la propriété de changement d'échelle du mouvement brownien, on a

$$\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^a |B_u^{x,a}| du\right] = \mathbb{E}\left[\exp -\int_0^{a/\varepsilon^{2/3}} |B_u^{x/\varepsilon^{1/3},a/\varepsilon^{2/3}}| du\right]. \tag{1.28}$$

En conditionnant $\{b_u : 0 \leq u \leq a\}$ par rapport à la variable Gaussienne centrée b_a, de variance $\sigma = a(1-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^a |b_u| du\right] &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\sigma\pi}}\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^a |B_u^{x,a}| du\right] \exp -\frac{x^2}{2\sigma}dx \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\sigma\pi}}\mathbb{E}\left[\exp -\int_0^{a/\varepsilon^{2/3}} |B_u^{x/\varepsilon^{1/3},a/\varepsilon^{2/3}}| du\right] \exp -\frac{x^2}{2\sigma}dx.
\end{aligned}$$

On calcule alors la valeur de l'expression :

$$\mathbb{E}\left[\exp -\int_0^t |B_u^{x,t}| du\right]$$

en utilisant des arguments similaires à ceux qui apparaissent dans [Sh].
Dans un premier temps, on rappelle la formule de Kac (voir, par exemple [I-MK], p. 54): pour toute fonction bornée à support compact f, et pour tout potentiel $V \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \exp - \left\{\alpha t + \int_0^t V(B_s)ds\right\} f(B_t)dt\right] = u(0), \tag{1.29}$$

où u est l'unique solution bornée de l'équation

$$-\frac{1}{2}u''(x) + (\alpha + V(x))u(x) = f(x). \tag{1.30}$$

On prend $V(x) = |x|$. Soient Φ, Ψ deux solutions de l'équation homogène

$$-\frac{1}{2}u''(x) + (\alpha + V(x))u(x) = 0,$$

telles que Φ est bornée en $+\infty$, Ψ est bornée en $-\infty$, et telles que

$$\Phi\Psi' - \Phi'\Psi = 2. \tag{1.31}$$

Alors, par application de l'opérateur de Green à f, la solution de l'équation (1.30) s'écrit :

$$u(x) = \Phi(x)\int_{-\infty}^x \Psi(y)f(y)dy + \Psi(x)\int_x^\infty \Phi(y)f(y)dy, \tag{1.32}$$

et, par (1.29)

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \exp - \left\{\alpha t + \int_0^t |B_s|ds\right\} f(B_t)dt\right] \\ &= \Phi(0)\int_{-\infty}^0 \Psi(y)f(y)dy + \Psi(0)\int_0^\infty \Phi(y)f(y)dy.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Or les fonctions d'Airy Ai et Bi satisfont à l'équation $-u''(x) + x\,u(x) = 0$, avec $Ai(\cdot)$ borné en $+\infty$ (voir, par exemple, [A-S], p. 162). C'est pourquoi on obtient :

$$\Phi(x) = \begin{cases} d_0 Ai(2^{1/3}(x+\alpha)), & \text{si } x \geq 0 \\ d_1 Ai(2^{1/3}(-x+\alpha)) + d_2 Bi(2^{1/3}(-x+\alpha)), & \text{si } x < 0 \end{cases} = \Psi(-x), \tag{1.34}$$

où la dernière égalité résulte de la symétrie de l'équation. Les constantes d_0, d_1, d_2 peuvent être déterminées grâce aux conditions $\Phi(0+) = \Phi(0-)$, $\Phi'(0+) = \Phi'(0-)$ et grâce à (1.31). On a alors, par exemple,

$$d_0^2 = -\frac{2^{-1/3}}{Ai(2^{1/3}\alpha)Ai'(2^{1/3}\alpha)}. \tag{1.35}$$

Pour obtenir le résultat de cette proposition il suffit d'introduire le conditionnement de $\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ par rapport à $B_t = x$, c'est pourquoi on prend, dans l'expression (1.29), la fonction particulière

$$f(y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\delta}\mathbb{1}_{\{|y-x|<\delta\}}(y)$$

puis on fait tendre $\delta \downarrow 0$ (1.33). Dans le membre de droite de (1.33), on a

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi}\Psi(0)\Phi(x), & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{2\pi}\Phi(0)\Psi(x), & \text{si } x < 0 \end{cases} = \sqrt{2\pi}\Phi(0)\Phi(|x|) = \sqrt{2\pi}d_0^2 Ai(2^{1/3}(|x|+\alpha))Ai(2^{1/3}\alpha)$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}2^{-1/3}Ai(2^{1/3}(|\xi|+\alpha))}{Ai'(2^{1/3}\alpha)},$$

par (1.34) et (1.35). La limite du membre de gauche de (1.33) peut s'écrire :

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \exp -\left\{\alpha t + \int_0^t |B_s|ds\right\} \frac{\mathbb{1}_{\{|B_t - x|<\delta\}}}{\mathbb{P}(|B_t - x| < \delta)} \frac{\mathbb{P}(|B_t - \xi| < \delta)}{2\delta/\sqrt{2\pi t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}\right] \tag{1.36}$$

On note que $\mathbb{P}(|B_t - x| < \delta) \leq \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi t}}$ et $\lim_{\delta\downarrow 0} \dfrac{\mathbb{P}(|B_t - x| < \delta)}{2\delta/\sqrt{2\pi t}} = \exp -\dfrac{x^2}{2t}$. Alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient pour (1.36)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbb{E}\left[\exp -\int_0^t |B_s|ds \middle| B_t = x\right] \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{2\pi}2^{-1/3}Ai(2^{1/3}(|x|+\alpha))}{Ai'(2^{1/3}\alpha)}.$$

Par inversion de la transformée de Laplace (voir, par exemple, [Ri], p. 241), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\exp -\int_0^t |B_s|ds \middle| B_t = x\right] \frac{\exp -\frac{x^2}{2t}}{\sqrt{t}} = -\sqrt{\pi}2^{1/6}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{us}Ai(2^{1/3}(|x|+u))}{Ai'(2^{1/3}u)}du$$

$$= -\sqrt{\pi}2^{1/6}\sum_{n=1}^\infty \frac{Ai(2^{1/3}|\xi| + a'_n)}{Ai''(a'_n)} \exp\frac{a'_n t}{2^{1/3}},$$

pour x tel que $Ai(2^{1/3}|x| + a'_n) \neq 0$, $\forall n$. Ici a'_n est le n-ième zéro de Ai'. La dernière égalité est obtenue en calculant les résidus de $1/Ai'(u)$.
Enfin, puisque $-Ai''(x) + x\,Ai(x) = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\exp -\int_0^t |B_s|ds \middle| B_t = x\right] \frac{\exp -\frac{x^2}{2t}}{\sqrt{t}} = -\sqrt{\pi}2^{1/6}\sum_{n=1}^\infty \frac{Ai(2^{1/3}|x| + a'_n)}{a'_n Ai(a'_n)} \exp\frac{a'_n t}{2^{1/3}}.$$

Pour obtenir $\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^a |b_u|du\right]$, il suffit d'intégrer l'égalité précédente :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}\left[\exp -\int_0^{a/\varepsilon^{2/3}} |B_u^{x/\varepsilon^{1/3}, a/\varepsilon^{2/3}}|du\right] \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}dx$$

$$= -\frac{2^{2/3}}{\sigma}\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{Ai(2^{1/3}|x/\varepsilon^{1/3}| + a'_n)}{a'_n Ai(a'_n)} \exp\frac{a'_n a}{2^{1/3}\varepsilon^{2/3}} \exp\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{x^2}{2}dx$$

$$= \frac{2^{2/3}}{\sigma}\sum_{n=1}^\infty c_n \exp\frac{a'_n a}{2^{1/3}\varepsilon^{2/3}},$$

où

$$c_n = \frac{1}{a'_n Ai(a'_n)}\int_0^\infty Ai\left(2^{1/3}\left|\frac{x}{\varepsilon^{1/3}}\right| + a'_n\right) \exp\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

En effet, on a $\sigma^2 = a(1-a) < a$ et $|Ai(u)| \leq Ai(a'_1)$ (voir, par exemple, [A-S], p. 162); par ailleurs, $|Ai(a'_n)| \sim b_1 n^{-1/6}$ et $-a'_n \sim b_2 n^{2/3}$, quand $n \uparrow \infty$, où b_1 et b_2 sont des constantes. On obtient alors la convergence de la série par le critère de Raabe-Duhamel.
De plus, par des arguments classiques de convergence monotone et dominée on trouve

$$\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^a |b_u|du\right] = c_1 \frac{2^{2/3}}{a(1-a)} \exp(\frac{a'_1 a}{2^{1/3}\varepsilon^2/3}) \left(1 + o(\frac{1}{\varepsilon^{2/3}})\right),$$

ce qui entraîne (1.27). **QED**

Remarque 5 *Le résultat est également vrai pour $a = 1$. En effet, dans [Ri], il est montré que*

$$\mathbb{E}\left[\exp -\sqrt{2}t^{3/2}\int_0^1 |b_u|du\right] = \sqrt{\pi t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(a'_n t)}{-a'_n}, \text{ pour } t > 0. \tag{1.37}$$

Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la fin de la preuve de la Proposition 9, on déduit que (1.27) *est aussi vérifié pour $a = 1$.*

Preuve du Théorème 3:

i) Voici tout d'abord quelques notations, définitions et résultats concernant les espaces de Hölder (voir, par exemple, [B-R]).
Soit $0 < \alpha < 1$. On note $\mathcal{C}^\alpha$ l'ensemble de toutes les fonctions f sur [0,1] qui sont α-Hölder continues. La norme de cet espace sera notée par

$$\|f\|_\alpha := \sup_{0 \leq t < s \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Par $\mathcal{C}_0^\alpha$, on désigne le sous-espace de $\mathcal{C}^\alpha$ comprenant toutes les fonctions f telles que :

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{|t-s| \leq \delta \ ; \ 0 \leq t < s \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} = 0.$$

Nous définissons également c_0 l'ensemble des suites $(\xi_n)_{n \geq 0}$ telles que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ muni de la norme sup. On sait que les espaces de Banach séparables c_0 et $\mathcal{C}_0^\alpha$ sont isomorphes (voir, par exemple, [Ci]) grâce à l'isomorphisme $T^\alpha : c_0 \longrightarrow \mathcal{C}_0^\alpha$ donné par :

$$\xi \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{c_n(\alpha)} \Phi_n.$$

Ici $\{\Phi_n : n \geq 0\}$ est la base de Schauder et $c_n(\alpha) = 2^{\bar{n}(\alpha - 1/2)} 2^{1-\alpha}$ avec $\bar{n} = \lfloor \log_2 n \rfloor$. On rappelle aussi que, puisque le pont brownien standard a ses trajectoires presque sûrement contenues dans l'espace de Hölder de paramètre α ($\alpha < 1/2$), il peut être décomposé dans la base de Schauder comme suit :

$$b_u = \sum_{n=2}^{\infty} g_n \Phi_n(u), \quad u \in [0,1],$$

où g_n sont des copies indépendantes d'une Gaussienne centrée réduite.

ii) On suppose sans perdre de généralité que $x \geq 0$. L'espérence apparaissant dans l'expression (1.5) de la densité $p_t^\varepsilon(x)$ peut être majorée :

$$\mathbb{E}\left[\exp - \left\{\frac{\gamma t}{2}\int_0^1 |xs - \varepsilon\sqrt{t}b_s|^{-1/2} ds + \frac{t}{2\varepsilon}\int_0^1 |xs - \varepsilon\sqrt{t}b_s| ds\right\}\right] \leq E,$$

où

$$E := \mathbb{E}\left[\exp -\frac{t}{2\varepsilon}\int_0^1 |xs - \varepsilon\sqrt{t}b_s|ds\right].$$

Soit ϕ_0 la fonction qui minimise la fonctionnelle A donnée par (1.17), alors

$$p_t^\varepsilon(x) \le \frac{E}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\frac{A(\phi_0)}{2\varepsilon^2}.$$

On introduit la boule Hölderienne $B_\alpha(\phi_0,\beta) = \{\phi \in \mathcal{C}_0^\alpha : \|\phi - \phi_0\|_\alpha \le \beta\}$ $(\beta > 0)$ et on décompose $E = E_1 + E_2$ avec :

$$E_1 := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 |xs - \varepsilon\sqrt{t}b_s|ds\right\} \mathbb{1}_{\{\varepsilon b \notin B_\alpha(\phi_0,\beta)\}}\right]$$

et

$$E_2 := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 |xs - \varepsilon\sqrt{t}b_s|ds\right\} \mathbb{1}_{\{\varepsilon b \in B_\alpha(\phi_0,\beta)\}}\right].$$

iii) On considère dans un premier temps E_1 : par le principe de Varadhan pour le pont brownien en norme Hölderienne, on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon^2 \ln E_1 = -\inf_{\{\phi\in H^1\cap B(\phi_0,\beta)^c:\phi(0)=\phi(1)=0\}} A(\phi) \le -A(\phi_0) - \beta. \tag{1.38}$$

En fait ce résultat est obtenu grâce au lemme suivant :
Lemme 1 *Pour toute fonction ψ sur* $[0,1]$ *telle que* $\psi(0) = \psi(1) = 0$,

$$A(\psi) - A(\phi_0) \ge t^{3/2}\int_0^a |\psi(u) - \phi_0(u)|du + \|\psi - \phi_0\|_{H^1}, \tag{1.39}$$

la fonctionnelle A étant donnée par (1.17) et a *étant défini au début de la preuve de la Proposition 7. De plus,*

$$\textit{si } \|\psi - \phi_0\|_\alpha \ge \beta, \textit{ alors } A(\psi) - A(\phi_0) \ge \beta.$$

On reporte la preuve de ce lemme et on termine la preuve du Théorème 3.
iv) Soit la décomposition de la fonction ϕ_0 dans la base de Schauder :

$$\phi_0(u) := \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_n}{c_n(\alpha)}\Phi_n(u) \text{ et } \|\phi_0\|_{H^1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_n^2}{c_n^2(\alpha)}. \tag{1.40}$$

On obtient alors :

$$E_2 = \lim_{N\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[\exp -\left\{\frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 \left|xs - \varepsilon\sqrt{t}\sum_{n=2}^N g_n\Phi_n(s)\right| ds\right\} \prod_{n=2}^N \mathbb{1}_{\{\varepsilon c_n(\alpha)g_n\in[\xi_n-\beta,\xi_n+\beta]\}}\right]$$

$$= \lim_{N\uparrow\infty} \int\dots\int_{\prod_{n=2}^N[\frac{\xi_n-\beta}{c_n(\alpha)},\frac{\xi_n+\beta}{c_n(\alpha)}]} \frac{\varepsilon^{-N}}{(2\pi)^{N/2}} \exp -\left\{\frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 \left|xs - \varepsilon\sqrt{t}\sum_{n=2}^N x_n\Phi_n(s)\right| ds\right.$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\frac{x_n^2}{2\varepsilon^2}\Bigg\}\,dx_1...dx_N.$$

Par le Lemme 1 et par (1.40), on a

$$E_2 \leq \lim_{N\uparrow\infty}\left(\exp-\frac{A(\phi_0)}{2\varepsilon^2}\right)\int\cdots\int_{\prod_{n=2}^{N}[\frac{\xi_n-\beta}{c_n(\alpha)},\frac{\xi_n+\beta}{c_n(\alpha)}]}\frac{\varepsilon^{-N}}{(2\pi)^{N/2}}\exp-\left\{\sum_{n=2}^{N}\frac{(c_n(\alpha)x_n-\xi_n)^2}{2\varepsilon^2 c_n(\alpha)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{t^{3/2}}{2\varepsilon^2}\int_0^a\left|\sum_{n=2}^{N}(c_n(\alpha)x_n-\xi_n)\frac{\Phi_n(s)}{c_n(\alpha)}\right|ds\right\}dx_1...dx_N,$$

puisque $\phi_0(u) = xu/\sqrt{t}$ sur [0,a] (voir **ii)** dans la preuve de la Proposition 7. Alors, toujours par la décomposition du pont brownien, on obtient

$$E_2 \leq \left(\exp-\frac{A(\phi_0)}{2\varepsilon^2}\right)\mathbb{E}\left[\exp-\frac{t^{3/2}}{2\varepsilon}\int_0^a|b_s|ds\right]. \tag{1.41}$$

On déduit alors de (1.38) et de la Proposition 9, que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2/3}\ln p_t^\varepsilon(x) \leq \max\left\{-\infty\ ,\ a_1'\left(\frac{t}{2}-\sqrt{|x|}\right)\right\} = a_1'\left(\frac{t}{2}-\sqrt{|x|}\right),$$

Ceci termine la preuve du théorème sauf pour celle du Lemme 1. **QED.**

Preuve du Lemme 1:
i) On suppose sans perte de généralité que $x \geq 0$ et on note $\tilde{\psi}$ la fonction suivante:

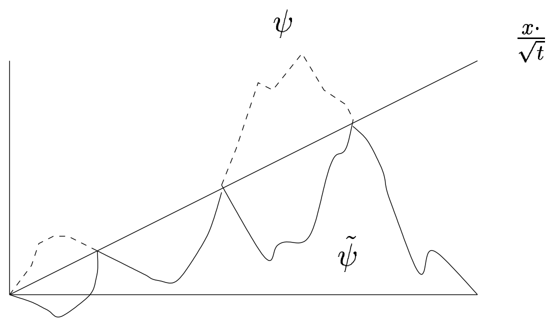

FIG. 1.2 – *Définition de* $\tilde{\psi}$

$$\tilde{\psi}(u) := \psi(u) - 2\left(\psi(u)-\frac{xu}{\sqrt{t}}\right)\mathbb{1}_{\{\psi(\bullet)-\frac{x\bullet}{\sqrt{t}}\geq 0\}}(u).$$

Alors

$$t\int_0^1|xu-\sqrt{t}\psi(u)|du = t\int_0^1|xu-\sqrt{t}\tilde{\psi}(u)|du,$$

ainsi

$$A(\psi) = t\int_0^1|xu-\sqrt{t}\tilde{\psi}(u)|du + \int_0^1\psi'^2(u)du.$$

Puisque $x \bullet -\sqrt{t}\tilde{\psi}(\bullet) \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
A(\psi) &= t\int_0^1 (xu-\sqrt{t}\tilde{\psi}(u))du + \int_0^1 \psi'^2(u)du \\
&= t\int_0^1 (xu-\sqrt{t}\phi_0(u))du + \int_0^1 (\phi_0')^2(u)du - t^{3/2}\int_0^1 (\tilde{\psi}-\phi_0)(u)du \\
&\quad +2\int_0^1 (\phi_0'(\psi'-\phi_0'))(u)du + \int_0^1 (\psi'-\phi_0')^2(u)du \\
&= A(\phi_0) - t^{3/2}\int_0^1 (\tilde{\psi}-\phi_0)(u)du - 2\int_0^1 \phi_0''(\psi-\phi_0)(u)du + \int_0^1 (\psi'-\phi_0')^2(u)du \\
&= A(\phi_0) - t^{3/2}\int_0^a (\tilde{\psi}-\phi_0)(u)du + \int_0^1 (\psi'-\phi_0')^2(u)du - t^{3/2}\int_a^1 (\tilde{\psi}-\psi)(u)du.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\phi_0''(u) = -t^{3/2}/2$ sur $[a,1]$ et $\phi_0''(u) = 0$ sur $[0,a]$. On obtient alors (1.39) par une minoration évidente.
ii) Pour $f \in \mathcal{C}_0^\alpha$, $\|f\|_{H^1} \geq \|f\|_\alpha$. Ainsi, pour ψ appartenant au complémentaire de la boule Hölderienne $B_\alpha(\phi_0,\beta)$, on a $A(\psi) - A(\phi_0) \geq \beta$. **QED**

1.4 Solutions de viscosité d'une équation de Hamilton-Jacobi

Dans les théorèmes 1 et 2, nous avons obtenu le comportement de la densité $p_t^\varepsilon(x)$, lorsque (t,x) n'est pas situé entre les trajectoires des solutions extrémales. Le but de cette section est d'étudier le comportement de la densité entre les extrémales. Plus précisément, nous calculons la limite quand ε tend vers 0 de $s(\varepsilon)\ln p_t^\varepsilon(x)$, avec $s(\varepsilon) = \varepsilon^{(2(1-\gamma))/(1+\gamma)}$.

Théorème 4 *Si (t,x) appartient au domaine situé entre les trajectoires des solutions extrémales de (1.2), alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\ln p_t^\varepsilon(x) = -\lambda_1\left(t - \frac{|x|^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right). \tag{1.42}$$

Ici, λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{2|x|^{1-\gamma}} + \frac{|x|^{2\gamma}}{2}.$$

Notre étude repose sur un outil particulier : les solutions de viscosité d'équation aux dérivées partielles parabolique. Pour une étude détaillée de ce concept, on conseille au lecteur de consulter le livre de Barles [B] ou encore celui de Fleming [Fl].
On introduit tout d'abord quelques domaines du premier quart de plan :

$$\Omega := \{(t,x) : \quad 0 < t < T \quad , \quad 0 < x < \{(1-\gamma)t\}^{1/1-\gamma}\},$$
$$\tilde{\Omega} := \{(t,x) : \quad 0 < t \leq T \quad , \quad 0 < x < \{(1-\gamma)t\}^{1/1-\gamma}\},$$

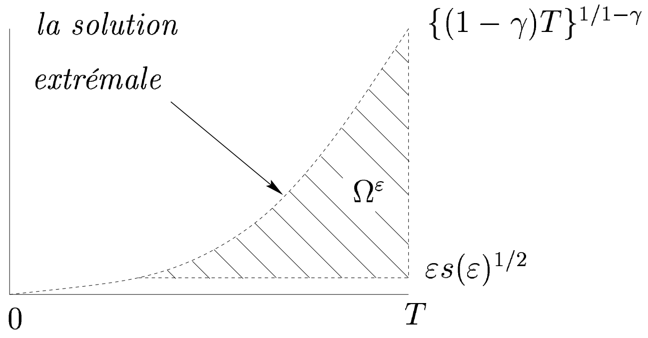

FIG. 1.3 – *Le domaine* Ω^ε

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega} &:= \{(t,x): \quad 0 < t \le T \quad , \quad 0 \le x < \{(1-\gamma)t\}^{1/1-\gamma}\},\\
\Omega^\varepsilon &:= \{(t,x): \quad (1-\gamma)\varepsilon^{4/(1+\gamma)} < t < T \quad , \quad \varepsilon s(\varepsilon)^{1/2} < x < \{(1-\gamma)t\}^{1/1-\gamma}\},\\
\tilde{\Omega}^\varepsilon &:= \{(t,x): \quad (1-\gamma)\varepsilon^{4/(1+\gamma)} < t \le T \quad , \quad \varepsilon s(\varepsilon)^{1/2} < x < \{(1-\gamma)t\}^{1/1-\gamma}\},\\
\widehat{\Omega}^\varepsilon &:= \{(t,x): \quad (1-\gamma)\varepsilon^{4/(1+\gamma)} < t \le T \quad , \quad \varepsilon s(\varepsilon)^{1/2} \le x < \{(1-\gamma)t\}^{1/1-\gamma}\}.
\end{aligned}$$

On considère maintenant l'équation aux dérivées partielles suivante, définie sur un Borélien $U \subset \mathbb{R}^2$ (on précisera U par la suite):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0 \ , \tag{1.43}$$

où H est un Hamiltonien réel défini sur $\mathbb{R} \times U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On suppose que H est elliptique dans le sens suivant :

$$H(t,x,u,p,q_1) \le H(t,x,u,p,q_2), \text{ if } q_2 \le q_1.$$

On donne alors la définition d'une solution de viscosité de l'équation (1.43) qui sera légèrement différente de celle présentée dans [B] (voir Définition 2.1, p. 11 ou Définition 4.1, p. 80), puisque les domaines que l'on considère ne sont ni ouverts ni fermés.

Définition 2 *Soit u une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s) bornée (respectivement semi-continue inférieurement (s.c.i.)) définie sur un ensemble connexe U à frontière connexe. u est une sous-solution de viscosité (respectivement sur-solution de viscosité) de (1.43) sur U, si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(U)$, et $(t_0,x_0) \in U$ point de maximum local (resp. minimum local) de $u - \varphi$, on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0,x_0) + H(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0,x_0),\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_0,x_0)) \le 0 \quad (\textit{respectivement} \quad \ge 0). \tag{1.44}$$

Proposition 10 *Soit*

$$u^\varepsilon(t,x) := -s(\varepsilon)\ln(p_t^\varepsilon(x) + e^{-D/s(\varepsilon)}), \tag{1.45}$$

où $D > 0$. Alors u^ε est une solution de viscosité de

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + H_\varepsilon(t,x,u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}) = 0 \quad \textit{sur } \tilde{\Omega}^\varepsilon, \tag{1.46}$$

muni de l'Hamiltonien :

$$H_\varepsilon(t,x,u,p,q) := -\frac{\varepsilon^2}{2}q + \frac{\varepsilon^{\frac{4\gamma}{1+\gamma}}}{2}p^2 + x^\gamma p - \gamma x^{\gamma-1}s(\varepsilon)\left(1 - \exp\frac{u-D}{s(\varepsilon)}\right). \quad (1.47)$$

Remarque 6 *On introduit le terme exponentiel, avec $D > 0$, dans la définition de u^ε dans le but d'obtenir la bornitude de cette fonction. Evidemment, en choisissant D assez grand, ce terme supplémentaire n'interviendra pas dans la limite quand $\varepsilon \to 0$.*

Preuve de la Proposition 10 :
a) On montre tout d'abord que l'équation (1.46) est vérifiée dans un sens classique sur Ω^ε .
Puisque V, le potentiel donné par (1.8) de l'opérateur de Schrödinger, vérifie une propriété d'uniforme continuité Hölderienne dans un voisinage de tout point $x \neq 0$ (voir [Ro] Définition 2 p. 122), on déduit grâce au Théorème 1 p. 127 dans [Ro] que la fonction

$$(t,x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t})\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t V(B_s)ds \middle| B_t = x\right]$$

est une solution classique de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}V\,u \quad \text{sur }]0,T] \times \mathbb{R}^*.$$

Ainsi, par des arguments similaires, en utilisant (1.7), on obtient $p^\varepsilon \in \mathcal{C}^{1,2}(\Omega^\varepsilon)$. Par la transformation logarithmique, on déduit que u^ε est une solution classique de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H_\varepsilon(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0 \quad \text{sur } \Omega^\varepsilon,$$

où H_ε est donné par (1.47).
b) Par ailleurs, toute solution classique est une solution de viscosité, ce qui entraîne que u^ε est une solution de viscosité sur Ω^ε. Il suffit donc de montrer que u^ε est une solution de viscosité sur $\tilde{\Omega}^\varepsilon \setminus \Omega^\varepsilon$. On choisit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\tilde{\Omega}^\varepsilon)$ tel que $(T,x_0) \in \tilde{\Omega}^\varepsilon$ soit un point de maximum local de $u^\varepsilon - \varphi$. En remplaçant φ par $\varphi + (x-x_0)^4 + (t-T)^2$, la première et la seconde dérivée en (T,x_0) ne changent pas. On peut ainsi que (T,x_0) est un point de maximum strict. L'idée est d'adapter le raisonnement effectué sur les points de Ω^ε au point (T,x_0). On a besoin pour cela du lemme suivant :
Lemme 2 *Soit $(u_\eta)_\eta$ une suite de fonction s.c.s. qui converge vers u, uniformément sur tout compact de l'ensemble borné U. On suppose que u peut être prolongée en une fonction s.c.s. sur $\bar{U}$. Si (τ,ξ) est un point de maximum local strict de u, il existe alors $(\tau_\eta,\xi_\eta) \in \bar{U}$ suite de points de maximum local de u_η telle que $\lim_{\eta\to 0}(\tau_\eta,\xi_\eta) = (\tau,\xi)$.*

On termine maintenant la preuve de la Proposition 10. On considère la fonction

$$\Xi_\eta(t,x) := u^\varepsilon(t,x) - \varphi(t,x) - \frac{\eta}{T-t}, \ \ \eta > 0.$$

En appliquant le Lemme 2 sur Ω^ε, il existe une suite $(t_\eta,x_\eta) \in \tilde{\Omega}^\varepsilon$ de points de maximum local de Ξ_η qui converge vers (T,x_0), quand $\eta \to 0$. Evidemment, $\lim_{t\to T}\Xi_\eta(t,x) = -\infty$.

Aussi $t_\eta < T$ et pour η assez petit $(t_\eta,x_\eta) \in \Omega^\varepsilon$.
Comme u^ε est une sous-solution de viscosité sur Ω^ε, on a :

$$\frac{\eta}{(T-t_\eta)^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_\eta,x_\eta) + H_\varepsilon(t_\eta,x_\eta,u^\varepsilon(t_\eta,x_\eta),\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_\eta,x_\eta),\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_\eta,x_\eta)) \leq 0.$$

Par la continuité de u^ε, en faisant tendre $\eta \to 0$, on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(T,x_0) + H_\varepsilon(T,x_0,u^\varepsilon(T,x_0),\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T,x_0),\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(T,x_0)) \leq 0.$$

Le même argument peut être utilisé pour montrer que u^ε est une sur-solution. Ceci termine la preuve de la Proposition 10, il ne reste donc qu'à démontrer le Lemme 2 pour que cette preuve soit complète. **QED**

Preuve du Lemme 2 : Le résultat est clair pour $(\tau,\xi) \in int(U)$ (voir [B] Lemme 4.2 p.88). On suppose maintenant que $(\tau,\xi) \in \partial U$. Soit $r > 0$. On définit l'ensemble compact $K^r = \overline{B((\tau,\xi),r)} \cap \overline{U}$, où B est une boule Euclidienne centrée en (τ,ξ) de rayon r telle que (τ,ξ) est le point de maximum strict sur K^r. La fonction s.c.s. u_η atteint son maximum sur le compact K^r au point (τ_η,ξ_η). On peut alors extraire une sous-suite, notée aussi par volonté de clareté (τ_η,ξ_η), qui converge vers $(\bar\tau,\bar\xi)$, quand $\eta \to 0$. On suppose que $(\bar\tau,\bar\xi) \notin \partial U$. Comme u est s.c.s. et comme (τ,ξ) est un point de maximum strict, il existe $(t,y) \in K^r$ tel que

$$u(\tau,\xi) > u(t,y) > u(\bar\tau,\bar\xi)$$

Cette inégalité ne peut être vraie ! En effet, $u_\eta(\tau_\eta,\xi_\eta)$ tend vers $u(\bar\tau,\bar\xi)$ et $u_\eta(t,y)$ tend vers $u(t,y)$, ces deux convergences étant uniformes. Ainsi, $(\bar\tau,\bar\xi) \in \partial U$. On sait, de plus, que $\|(\bar\tau,\bar\xi) - (\tau,\xi)\| \leq r$. On peut alors choisir une suite $(\bar\tau^r,\bar\xi^r)$ qui tend vers (τ,ξ), quand $r \to 0$. Par diagonalisation, on trouve alors une suite $(\tau_\eta,\xi_\eta) \in \bar U$ qui converge vers (τ,ξ), quand $\eta \to 0$. **QED**

Fort du résultat énoncé dans la Proposition 10, on voudrait passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans l'équation de Hamilton-Jacobi (1.46). On montre alors le résultat de stabilité suivant :

Proposition 11 *Soit*

$$\bar u(t,x) := \limsup_{\varepsilon\to 0,\ s\to t,\ y\to x,\ (s,y)\in\widehat\Omega^\varepsilon} u^\varepsilon(s,y), \quad \textit{pour tout } (t,x) \in \widehat\Omega. \tag{1.48}$$

Alors $\bar u$ est une sous-solution de viscosité de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H_0\left(x,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad \textit{sur } \tilde\Omega, \tag{1.49}$$

munie de l'Hamiltonien

$$H_0(x,p) := x^\gamma p. \tag{1.50}$$

En notant $\underline{u} = \liminf u^\varepsilon$, au sens de la limite (1.48)*, alors $\underline{u}$ est une sur-solution de viscosité de* (1.49)*.*

La preuve de ce résultat est identique à celle du Théorème 4.1 p.85 dans [B], mis à part que le résultat de stabilité y est démontré pour des ensembles fermés. Il suffit donc d'utiliser le Lemme suivant qui est la clef de la preuve.

Lemme 3 *Soit* $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ *une suite de fonctions s.c.s. ayant une bornitude locale uniforme sur* $\widehat{\Omega}^\varepsilon$*. On définit* $\bar{v} = \limsup v_\varepsilon$ *comme dans* (1.48)*. On suppose que* $\bar{v}$ *admet un maximum local strict sur* $\widehat{\Omega}$*. Il existe alors une sous-suite* $(v_{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$ *de* $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ *et une suite* $(r_{\varepsilon'},z_{\varepsilon'})_{\varepsilon'} \in \widehat{\Omega}^\varepsilon$ *telles que :*
pour tout $\varepsilon' > 0$*,* $v_{\varepsilon'}$ *atteint un maximum local sur* $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ *en* $(r_{\varepsilon'},z_{\varepsilon'})$ *et*

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}(r_{\varepsilon'},z_{\varepsilon'}) = (r,z), \ \lim_{\varepsilon'\to 0} v_{\varepsilon'}(r_{\varepsilon'},z_{\varepsilon'}) = \bar{v}(r,z).$$

La preuve de ce Lemme est similaire à celle du Lemme 4.2, p. 88 dans [B].

Par ailleurs, on obtient aussi un résultat d'unicité :
Proposition 12 *Pour tout* $(t,x) \in \widehat{\Omega}$*,*

$$\bar{u}(t,x) = \underline{u}(t,x). \tag{1.51}$$

Preuve de la Proposition 12 :
i) Tout d'abord, montrons (1.51) pour $(t,x) \in]0,T] \times \{0\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\widehat{\Omega})$ telle que $(t_0,0)$ soit un point de maximum local de $\bar{u} - \varphi$. Utilisant le Lemme 3, on sait qu'il existe une suite de points $(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$ de maximum local de u^ε sur $\widehat{\Omega^\varepsilon}$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(t_\varepsilon,x_\varepsilon) = (t_0,0).$$

Modulo une sous-suite, on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :
a) soit $(t_\varepsilon,x_\varepsilon) \in \tilde{\Omega}^\varepsilon$. En prenant la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans l'équation (1.46), on trouve

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 1 \leq 0; \tag{1.52}$$

b) soit $(t_\varepsilon,x_\varepsilon) \in \widehat{\Omega^\varepsilon} \setminus \tilde{\Omega}^\varepsilon$. Comme, pour D assez grand,

$$u^\varepsilon(t_\varepsilon,x_\varepsilon) = -s(\varepsilon)\ln(p^\varepsilon_{t_\varepsilon}(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) + e^{-D/s(\varepsilon)})$$

tend vers $\lambda_1 t_0$ quand $\varepsilon \to 0$ (voir Corollaire 2), on a $\bar{u}(t_0,0) = \lambda_1 t_0$.
On prend une fonction particulière φ_0 qui ne vérifie pas (1.52):

$$\bar{u}(t,x) - \varphi_0(t,x) := \bar{u}(t,x) - \frac{x}{\eta} - \eta^2\cosh(\frac{t-t_0}{\eta^2}) - \frac{t-t_0}{\eta}, \tag{1.53}$$

on note (t_η,x_η) le point de maximum de $\bar{u} - \varphi_0$ sur $\widehat{\Omega}$ et on montre que a $(t_\eta,x_\eta) \notin \tilde{\Omega}$. Il est clair que

$$(\bar{u} - \varphi_0)(t_\eta,x_\eta) \geq (\bar{u} - \varphi_0)(t_0,0) = \bar{u}(t_0,0) - \eta^2.$$

Comme $\bar{u}$ est bornée, on obtient, par (1.53) $\lim_{\eta\to 0} x_\eta = 0$, $\lim_{\eta\to 0} t_\eta = t_0$ et $\lim_{\eta\to 0} \frac{t_\eta - t_0}{\eta} = 0$. Par ailleurs, puisque $\bar{u}$ est une sous-solution de viscosité, si $(t_\eta,x_\eta) \in \tilde{\Omega}$, on obtient

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(t_\eta,x_\eta) + x_\eta^\gamma \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(t_\eta,x_\eta) \leq 0. \tag{1.54}$$

Or, par (1.53),

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(t_\eta,x_\eta) = \sinh(\frac{t_\eta - t_0}{\eta^2}) + \frac{1}{\eta} \text{ and } \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(t_\eta,x_\eta) = \frac{1}{\eta}.$$

Il est évident que ni l'équation (1.52), ni l'équation (1.54) ne peuvent être satisfaites par φ_0 avec η assez petit. Ainsi, $(t_\eta,x_\eta) \notin \tilde{\Omega}$ et donc $(t_\eta,x_\eta) \in]0,T] \times \{0\}$. De plus, comme on se trouve dans le cas b), $\bar{u}(t_\eta,0) = \lambda_1 t_\eta$. On déduit alors que

$$\bar{u}(t_0,0) \leq \lambda_1 t_\eta + \eta - \varphi_0(t_\eta,0).$$

Quand $\eta \to 0$, on a

$$\bar{u}(t_0,0) \leq \lambda_1 t_0.$$

En utilisant le même raisonnement pour $\underline{u}$, on obtient $\bar{u} = \underline{u}$ sur $]0,T] \times \{0\}$.
ii) La seconde étape consiste à démontrer (1.51) pour $(t,x) \in \tilde{\Omega}$. Il suffit de vérifier (1.51) sur les compacts

$$K_\delta = \{(t,x) : x \leq ((t-\delta)(1-\gamma))^{1/1-\gamma}\} \cap \tilde{\Omega}$$

pour tout $\delta > 0$. Tout d'abord, on remarque que l'inégalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + x^\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) \leq 0$$

est satisfaite sur la frontière $\{(t,x) : x = \{(t-\delta)(1-\gamma)\}^{1/1-\gamma}\} \cap \tilde{\Omega}$. Pour prouver cela, il suffit de raisonner comme dans la preuve de la Proposition 10 en prenant $\varphi \in \mathcal{C}^2(K_\delta)$ et la suite de fonctions

$$\Xi_\eta(t,x) := \bar{u}(t,x) - \varphi(t,x) + \frac{\eta}{x^{1-\gamma} - (t-\delta)(1-\gamma)}.$$

On calcule maintenant

$$M := \sup_{K_\delta}(\bar{u} - \underline{u}). \tag{1.55}$$

On suppose que $M > 0$. Comme on l'a déjà vu, le maximum ne peut pas être atteint pour $x = 0$. Soit $\alpha > 0$. La fonction

$$\bar{u}_\alpha(t,x) := \bar{u}(t,x) - \alpha t$$

est une sous-solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H_0(x,\frac{\partial u}{\partial x}) + \alpha = 0.$$

On définit alors

$$\Psi_\eta(t,s,x,y) := \bar{u}_\alpha(t,x) - \underline{u}(s,y) - \frac{(x-y)^2}{\eta^2} - \frac{(t-s)^2}{\eta^2}, \tag{1.56}$$

et on note $(t_\eta,s_\eta,x_\eta,y_\eta)$ le point de maximum local de Ψ_η. Alors $\bar{u}_\alpha - \chi_1$ atteint un maximum local en (t_η,x_η), où χ_1 est la fonction définie par

$$\chi_1(t,x) := \underline{u}(s_\eta,y_\eta) + \frac{(x-y_\eta)^2}{\eta^2} + \frac{(t-s_\eta)^2}{\eta^2}.$$

Par le même argument, $\chi_2 - \underline{u}$ atteint un maximum local en $(s_{\eta'},y_{\eta'})$ où χ_2 est la fonction définie par

$$\chi_2(s,y) := \bar{u}_\alpha(t_\eta,x_\eta) - \frac{(x_\eta - y)^2}{\eta^2} - \frac{(t_\eta - s)^2}{\eta^2}.$$

Pour terminer la preuve, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4 *Il existe $\rho > 0$ et $(t_\eta,s_\eta,x_\eta,y_\eta)$, une suite de points de maximum de Ψ_η (donnée par (1.56)), tels que*

$$\lim_{\eta\to 0}(x_\eta - y_\eta)^2/\eta^2 = 0, \tag{1.57}$$

$$x_\eta > \rho \quad \textit{et} \quad y_\eta > \rho \quad \textit{pour} \quad \eta \quad \textit{assez petit.} \tag{1.58}$$

On continue la preuve de la Proposition 12. Grâce au Lemme 4, on sait qu'il existe une sous-suite $(t_{\eta'},s_{\eta'},x_{\eta'},y_{\eta'})$ de $(t_\eta,s_\eta,x_\eta,y_\eta)$, telle que $x_{\eta'} > 0$. Comme $\bar{u}_\alpha$ est une sous-solution de viscosité, on a

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial t}(t_{\eta'},x_{\eta'}) + H_0\left(x_{\eta'},\frac{\partial\chi_1}{\partial x}(t_{\eta'},x_{\eta'})\right) + \alpha \leq 0,$$

ainsi

$$\frac{2(t_{\eta'} - s_{\eta'})}{\eta'^2} + H_0\left(x_{\eta'},\frac{2(x_{\eta'} - y_{\eta'})}{\eta'^2}\right) + \alpha \leq 0. \tag{1.59}$$

Par le même argument, comme $\underline{u}$ est une sur-solution de viscosité, on a

$$\frac{2(t_{\eta'} - s_{\eta'})}{\eta'^2} + H_0\left(y_{\eta'},\frac{2(x_{\eta'} - y_{\eta'})}{\eta'^2}\right) \geq 0. \tag{1.60}$$

En soustrayant (1.60) à (1.59) on obtient

$$-\frac{2(x_{\eta'} - y_{\eta'})}{\eta'^2}(x_{\eta'}^\gamma - y_{\eta'}^\gamma) = H_0\left(x_{\eta'},\frac{2(x_{\eta'} - y_{\eta'})}{\eta'^2}\right) - H_0\left(y_{\eta'},\frac{2(x_{\eta'} - y_{\eta'})}{\eta'^2}\right) \leq -\alpha.$$

Par passage à la limite quand $\eta \to 0$, et grâce à (1.57) et (1.58), on obtient $0 \leq -\alpha$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $\alpha > 0$. La preuve est donc complète sauf pour les arguments du Lemme 4. **QED**

Remarque 7 *Il est évident que*

$$u(t,x) = \lambda_1\left(t - \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

est une solution classique de l'équation (1.49) qui vérifie $u(t,0) = \lambda_1 t$. Aussi, par les arguments de la preuve de la Proposition 12, on déduit un résultat d'unicité qui entraîne $\bar{u} = \underline{u} = u$.

Preuve du Lemme 4: Soit $M_\eta = \sup_{K_\delta} \Psi_\eta = \Psi_\eta(t_\eta,s_\eta,x_\eta,y_\eta)$. Alors, par (1.56), et pour tout (t,x) et (s,y) appartenant à K_δ,

$$\bar{u}_\alpha(t,x) - \underline{u}(s,y) - \frac{(x-y)^2}{\eta^2} - \frac{(t-s)^2}{\eta^2} \leq M_\eta.$$

Prenant $(t,x) = (s,y)$, on a

$$(\bar{u}_\alpha - \underline{u})(t,x) \leq M_\eta,$$

ainsi

$$M^\alpha := \sup_{K_\delta}(\bar{u}_\alpha - \underline{u}) \leq M_\eta.$$

Comme

$$M^\alpha \leq \bar{u}_\alpha(t_\eta,x_\eta) - \underline{u}(s_\eta,y_\eta) - \frac{(x_\eta - y_\eta)^2}{\eta^2} - \frac{(t_\eta - s_\eta)^2}{\eta^2},$$

et comme M^α, $\bar{u}_\alpha$ et $\underline{u}$ sont bornés, il existe $k > 0$, tel que

$$\frac{(x_\eta - y_\eta)^2}{\eta^2} + \frac{(t_\eta - s_\eta)^2}{\eta^2} \leq k, \quad \text{pour tout } \eta > 0.$$

On peut alors extraire une sous-suite $(t_{\eta'},s_{\eta'},x_{\eta'},y_{\eta'})$ qui converge vers $(t,s,x,y) \in K_\delta$ et telle que la suite $\{(x_{\eta'} - y_{\eta'})^2/\eta'^2 : \eta' \geq 0\}$ converge. Comme $x_{\eta'} - y_{\eta'} \to 0$ et $t_{\eta'} - s_{\eta'} \to 0$, quand $\eta' \to 0$, on trouve que $t = s$ et $x = y$.
De plus,

$$M^\alpha \leq \liminf M_{\eta'} \leq \limsup M_{\eta'}$$
$$\leq \bar{u}_\alpha(t,x) - \underline{u}(t,x) - \lim_{\eta' \to 0} \frac{(x_{\eta'} - y_{\eta'})^2}{\eta'^2} - \liminf_{\eta' \to 0} \frac{(t_{\eta'} - s_{\eta'})^2}{\eta'^2} \leq M^\alpha.$$

Aussi

$$\lim_{\eta' \to 0} M_{\eta'} = M^\alpha \quad \text{et} \quad \lim_{\eta' \to 0} \frac{(x_{\eta'} - y_{\eta'})^2}{\eta'^2} = 0.$$

On suppose que $(t,x) \in]0,T] \times \{0\}$. L'inégalité précédente implique

$$M^\alpha \leq \bar{u}_\alpha(t,x) - \underline{u}(t,x) = -\alpha t$$

puisque $\bar{u} = \underline{u}$ sur $]0,T] \times \{0\}$. Or, pour α assez petit, M^α est positif, ce qui contredit notre dernière inégalité et ainsi on en déduit (1.58). **QED**

Pour conclure, grâce à la symétrie de la densité $p_t^\varepsilon(\cdot)$, le résultat énoncé dans le Thórème 4 est une conséquence immédiate de la Remarque 7 et de la proposition suivante:
Proposition 13 *Pour* $(t,x) \in \tilde{\Omega}$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(x) = \lambda_1 \left(\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} - t \right), \tag{1.61}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact de $\tilde{\Omega}$. *Par ailleurs,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(0) = -\lambda_1 t, \quad \forall t > 0.$$

Preuve de la Proposition 13 : Cette preuve est une adaptation de la preuve d'un résultat dans [B] (voir Lemme 4.1, p. 86).
Soit K un compact de $\tilde{\Omega}$. Tout d'abord, on montre que $\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon = u$, uniformément sur K. Grâce à la Proposition 12, on sait que $\bar{u} = \underline{u} = u$ sur K. Ceci signifie que u est une fonction continue (puisque $\bar{u}$ est s.c.s. et $\underline{u}$ est s.c.i.). Ainsi par (1.45) $u^\varepsilon - u$ est aussi une fonction continue et $M_\varepsilon := \sup_K (u^\varepsilon - u)$ est atteint en $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in K$.
Comme u^ε est borné, on peut extraire une sous-suite $(t_{\varepsilon'}, x_{\varepsilon'})$, telle que $(t_{\varepsilon'}, x_{\varepsilon'}) \to (t,x) \in K$ et $M_{\varepsilon'} \to (\limsup_\varepsilon M_\varepsilon)$, quand $\varepsilon' \to 0$.
En utilisant (1.48), on a

$$\limsup_{\varepsilon'\to 0} u^{\varepsilon'}(t_{\varepsilon'}, x_{\varepsilon'}) \leq \bar{u}(t,x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_K (u^\varepsilon - u) &= \limsup_{\varepsilon'\to 0} \left(u^{\varepsilon'}(t_{\varepsilon'}, x_{\varepsilon'}) - u(t_{\varepsilon'}, x_{\varepsilon'}) \right) \\ &\leq \bar{u}(t,x) - u(t,x) = 0.\end{aligned}$$

Par des arguments similaires, on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_K (u - u^\varepsilon) \leq 0,$$

ce qui implique,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_K (u - u^\varepsilon) = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(t,x) &= \min\left\{ \limsup_{\varepsilon\to 0} (-s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(x)), D \right\} \\ \liminf_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(t,x) &= \min\left\{ \liminf_{\varepsilon\to 0} (-s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(x)), D \right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour D assez grand, le terme $\exp(-D/s(\varepsilon))$ ne change pas la limite quand ε tend vers zéro, puisque $u(t,x) = \lambda_1(t - \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma})$ est borné. Il s'ensuit que $s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(x)$ converge uniformément vers $\lambda_1(\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} - t)$ sur tout compact de $\tilde{\Omega}$.
Enfin, pour $x = 0$, on utilise la formule (1.9) de la Proposition 5 :

$$p_t^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_j t}{s(\varepsilon)}} \psi_j^2(0).$$

Par un raisonnement identique à celui de la preuve du Corollaire 2, on montre alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(0) = -\lambda_1 t.$$

QED

Ce résultat se généralise au comportement de la densité de la diffusion avec dérive b, où b vérifie (H1) et (H2). On rappelle que

$$s(\varepsilon) = \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}.$$

Théorème 5 *Si (t,x) appartient au domaine situé entre les trajectoires des solutions extrémales de (2), alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) \ln p_t^\varepsilon(x) = \lambda_1(K(|x|) - t),$$

où $K(x) = \int_0^x \frac{dy}{b(y)}$ et λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{C\gamma}{2|x|^{1-\gamma}} + \frac{C^2|x|^{2\gamma}}{2}.$$

Par ailleurs, cette convergence est uniforme sur tout compact de l'ensemble

$$\{(t,x) \,:\, 0 < t \leq T \ , \ 0 < |x| < K^{-1}(t)\}.$$

La démonstration de ce théorème est identique à celle du Théorème 4, en considérant des domaines différents et un Hamiltonien différent :

$$H_\varepsilon(t,x,u,p,q) := -\frac{\varepsilon^2}{2}q + \frac{\varepsilon^2}{2s(\varepsilon)}p^2 + b(x)p - b'(x)s(\varepsilon)\left(1 - \exp\frac{u-D}{s(\varepsilon)}\right).$$

On utilise aussi la Proposition 6 à la place du Corollaire 2.

Chapitre 2

Principe de Grandes Déviations fonctionnel

Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer un Principe de Grandes Déviations fonctionnel pour la loi de X^ε solution de l'E.D.S.

$$\left\{\begin{array}{l} dX_t^\varepsilon = \varepsilon dB_t + \mathrm{b}(X_t^\varepsilon)dt \\ X_0^\varepsilon = 0. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où B est un mouvement brownien unidimensionnel. On rappelle les hypothèses que doit vérifier la fonction b :

(H1) b est une fonction continue impaire croissante, $b' \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$ et b^{-1} est intégrable au voisinage de 0.

(H2) il existe $0 < \gamma < 1$ et $C > 0$ tels que $b'(x) \sim C\gamma|x|^{\gamma-1}$ au voisinage de l'origine.

On suppose de plus pour ce chapitre que b est une fonction bornée et strictement croissante. Alors X^ε suit un principe de Grandes Déviations de vitesse ε^2 et de bonne fonctionnelle d'action

$$I_T(f) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |f'(t) - b(f(t))|^2 dt \text{ , si } f \in H^1 \\ \infty \text{ sinon,} \end{array}\right. \tag{2.2}$$

où H^1 est l'espace de Cameron-Martin.

Théorème 6 *Pour tout Borélien Γ de $(\mathcal{C}([0,T]),\|.\|_\infty)$ on a*

$$-\inf_{x\in\Gamma^\circ} I_T(x) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in \Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in \Gamma) \leq -\inf_{x\in\bar{\Gamma}} I_T(x). \tag{2.3}$$

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur des arguments utilisés dans la discussion informelle de G. Jona-Lasinio [J-L].

Par ailleurs, soit φ une solution du système dynamique

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{b}(x(t)) \\ x(0) = 0\,; \end{cases} \tag{2.4}$$

si $\varphi \in \Gamma$, alors le théorème précédent ne donne aucune information sur le comportement de $\mathbb{P}(X^\varepsilon \in \Gamma)$ quand $\varepsilon \to 0$. En effet, $\inf_{x\in\Gamma} I_T(x) = 0$. Par contre, l'étude effectuée dans le chapitre précédent permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 7 *Si φ est une solution non extrémale de (2.4), alors, pour* $0 < \delta < K^{-1}(T) - |\varphi(T)|$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \ln \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| \le \delta \right) = \lambda_1(K(|\varphi(T)| + \delta) - T). \tag{2.5}$$

On rappelle que $K(x) = \int_0^x \frac{dy}{b(y)}$, que K^{-1} est sa fonction réciproque et que λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger lié au potentiel (1.13). Tout ceci permet donc de bien comprendre le comportement de la diffusion lorsque le coefficient de diffusion tend vers zéro (voir les explications de l'introduction générale à cette partie). Ce chapitre est divisé en trois sections : la première consiste à démontrer la minoration du Théorème 6 (c'est la partie la plus facile de la démonstration), la seconde consiste à prouver la majoration dans le cas d'ensembles Γ compacts. Dans un dernier temps, on démontrera le Théorème 7.

2.1 Minoration

Cette section est consacrée à l'étude de la minoration dans le principe de Grandes Déviations.

Proposition 14 *Soit Θ un ouvert de $(\mathcal{C}([0,T]),\|.\|_\infty)$. Alors,*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in \Theta) \ge -\inf_{\varphi\in\Theta} I_T(\varphi). \tag{2.6}$$

preuve

La preuve de cette proposition est divisée en deux partie. La première a pour objectif la minoration de la probabilité que la diffusion X^ε appartienne à une boule centrée en une fonction $\varphi \in H^1$ et la deuxième consiste à généraliser ce résultat aux ouverts.

i) Soit $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, et on note $b^{(n)} := b * \zeta_n$. Alors $b^{(n)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et de plus $b^{(n)}$ converge uniformément vers b lorsque $n \to \infty$, puisque b est uniformément continue. Soit $X^{n,\varepsilon}$ l'unique solution forte de l'E.D.S.

$$X_t^{n,\varepsilon} = \varepsilon B_t + \int_0^t b^{(n)}(X_s^{n,\varepsilon})ds, \quad \text{pour} \quad t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

En utilisant la formule de Girsanov, on obtient, pour tout $\varphi \in H^1$

$$A := \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| < \delta \right) = \mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{t\in[0,T]} |\varepsilon B_t - \varphi(t)| < \delta \right) e^{\xi_T} \right],$$

où χ est la fonction caractéristique et

$$\xi_T = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T b(\varepsilon B_s)dB_s - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T b^2(\varepsilon B_s)ds. \tag{2.8}$$

On définit $\xi_T^{(n)}$ de la même manière, en remplaçant juste b par $b^{(n)}$. Ainsi, pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} A &\geq \mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{t\in[0,T]}|\varepsilon B_t - \varphi(t)| < \delta\right)\chi\left(|\xi_T - \xi_T^{(n)}| < \alpha\right)e^{\xi_T}\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{t\in[0,T]}|\varepsilon B_t - \varphi(t)| < \delta\right)e^{\xi_T^{(n)}}\right]e^{-\alpha} - \mathbb{E}\left[\chi\left(|\xi_T - \xi_T^{(n)}| \geq \alpha\right)e^{\xi_T^{(n)}}\right] \\ &\geq \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{n,\varepsilon} - \varphi(t)| < \delta\right)e^{-\alpha} - \mathbb{P}(|\xi_T - \xi_T^{(n)}| \geq \alpha)^{1/2}\mathbb{E}[e^{2\xi_T^{(n)}}]^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Cette dernière minoration est obtenue par l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
Or, par la théorie de Freidlin-Wentzell appliquée à la diffusion $X^{n,\varepsilon}$, on obtient, pour $h > 0$ et $\varepsilon < \varepsilon_0(n,\delta,h)$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{n,\varepsilon} - \varphi(t)| < \delta\right) \geq e^{-(I_T^{(n)}(\varphi)+h)/2\varepsilon^2} \tag{2.10}$$

où la fonctionnelle d'action est donnée par

$$I_T^{(n)}(\varphi) = \int_0^T |\varphi'(s) - b^{(n)}(\varphi(s))|^2 ds. \tag{2.11}$$

Ainsi, en utilisant (2.10) et en choisissant $\alpha = h/\varepsilon^2$ dans l'expression (2.9), on obtient

$$A \geq e^{-(I_T^{(n)}(\varphi)+2h)/2\varepsilon^2} - \mathbb{P}(|\xi_T - \xi_T^{(n)}| \geq h/\varepsilon^2)^{1/2}\mathbb{E}[e^{2\xi_T^{(n)}}]^{1/2}. \tag{2.12}$$

On montre dans un premier temps que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(|\xi_T - \xi_T^{(n)}| \geq h/\varepsilon^2) = -\infty, \tag{2.13}$$

puis dans un deuxième temps que $\varepsilon^2 \ln \mathbb{E}[e^{2\xi_T^{(n)}}]$ est borné uniformément en ε, ce qui entraîne que dans le second membre de l'inégalité (2.12) seul le premier terme compte à la limite.
Démonstration de (2.13) : comme b est bornée, on obtient la majoration

$$\left|\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (b^2(\varepsilon B_s) - b^{(n)\,2}(\varepsilon B_s))ds\right| \leq \frac{T}{2\varepsilon^2}(\|b\|_\infty + \|b^{(n)}\|_\infty).$$

Il suffit alors de calculer

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \quad (b - b^{(n)})(\varepsilon B_s)dB_s \geq \frac{h}{\varepsilon}\right)$$

$$\begin{aligned}
= \mathbb{P} \quad & \left(\exp\left\{ \lambda \int_0^T (b - b^{(n)})(\varepsilon B_s) dB_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T (b - b^{(n)})^2 (\varepsilon B_s) ds \right\} \right. \\
& \left. \geq \exp\left\{ \frac{\lambda h}{\varepsilon} - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T (b - b^{(n)})^2 (\varepsilon B_s) ds \right\} \right) \\
\leq \exp \quad & \left\{ -\frac{\lambda h}{\varepsilon} + \frac{\lambda^2 T}{2} \|b - b^{(n)}\|_\infty \right\}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue grâce à l'inégalité de Markov et par un argument de martingale. En choisissant $\lambda = h/(2\varepsilon T \|b - b^{(n)}\|_\infty)$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (b - b^{(n)})(\varepsilon B_s) dB_s \geq \frac{h}{\varepsilon} \right) \leq \exp - \frac{h^2}{2\varepsilon^2 T \|b - b^{(n)}\|_\infty},$$

on en déduit ainsi (2.13) puisque $\|b - b^{(n)}\|_\infty \to 0$ quand n tend vers l'infini.
On montre maintenant que $\varepsilon^2 \ln \mathbb{E}[e^{2\xi_T^{(n)}}]$ est borné uniformément en ε. On note Z^ε la solution de l'E.D.S.

$$Z_t^\varepsilon = \varepsilon B_t + \int_0^t 2b^{(n)}(Z_s^\varepsilon) ds,$$

alors, par la formule de Girsanov, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{2\xi_T^{(n)}} \right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{ \frac{3}{2\varepsilon^2} \int_0^T b^{(n)\,2}(Z_s) ds \right\} \right] \\
&\leq \exp\left\{ \frac{3}{2\varepsilon^2} T \|b^{(n)}\|_\infty \right\}, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

ce qui implique le résultat recherché. On déduit alors de (2.9), en faisant tendre h vers zéro,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| < \delta \right) \geq -I_T^{(n)}(\varphi).$$

Comme le membre de gauche de l'inégalité précédente ne dépend pas de n, on a par passage à la limite

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| < \delta \right) \geq -I_T(\varphi),$$

où, pour $\varphi \in H^1$,

$$I_T(\varphi) = \int_0^T |\varphi'(s) - b(\varphi(s))|^2 ds.$$

ii) On a montré que la minoration est vérifiée pour toute boule ouverte autour d'une fonction de l'espace de Cameron-Martin. On prouve maintenant que c'est vrai pour tout ouvert. Soit Θ un ouvert de $(\mathcal{C}([0,T]), \|.\|_\infty)$. Alors, d'après i), pour tout $\varphi \in H^1 \cap \Theta$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $B(\varphi,\delta) \subset \Theta$, où $B(.,.)$ est une boule ouverte pour la norme uniforme, d'où

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in \Theta) \geq \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in B(\varphi,\delta)) \geq -I_T(\varphi),$$

ce qui entraîne

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in \Theta) \geq - \inf_{\varphi\in H^1\cap\Theta} I_T(\varphi).$$

QED

Corollaire 3 *I_T est une bonne fonctionnelle d'action. (voir Definition 1)*
preuve Pour montrer que I_T est une bonne fonctionnelle d'action, il suffit que la loi de la diffusion soit exponentiellement tendue et que la minoration dans les estimations des Grandes Déviations soit vérifiée pour tous les ouverts (voir par exemple [D-Z] p.8). Le deuxième point a évidemment été énoncé dans la Proposition 14. Il reste donc à montrer la tension exponentielle. Pour $M > 0$, par le théorème de Girsanov et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{t\in[0,T]} X_t^\varepsilon \leq M\right\}^c\right) &= \mathbb{E}\left[\chi\left(\sup_{t\in[0,T]} \varepsilon B_t > M\right) e^{\xi_T}\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \varepsilon B_t > M\right)^{1/2} \mathbb{E}[e^{2\xi_T}]^{1/2} \end{aligned}$$

où ξ_T est défini par (2.8). Par le même argument que celui qui vient d'être utilisé pour démontrer (2.14), on obtient

$$\mathbb{E}\left[e^{2\xi_T}\right] \leq \exp\left\{\frac{3}{2\varepsilon^2} T \|b\|_\infty\right\}.$$

De plus, on connaît la tension exponentielle du mouvement brownien : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \varepsilon B_t > M\right) \leq \frac{C\varepsilon}{M} e^{-M^2/\varepsilon^2}.$$

De ces deux résultats, on déduit aisément que pour tout α, il existe un compact K_α tel que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in K_\alpha) < -\alpha.$$

QED

2.2 Majoration sur les compacts

En fait, pour obtenir une majoration sur les fermés de $(\mathcal{C}([0,T]),\|.\|_\infty)$, il suffit d' avoir la majoration sur les compacts, puisque la fonctionnelle d'action est bonne d'après le Corollaire 1 (voir par exemple [D-Z] Lemme 1.2.18 p.8). Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :
Proposition 15 *Soit K un compact de $(\mathcal{C}([0,T]),\|.\|_\infty)$ tel que $\inf_{\varphi\in K} I_T(\varphi) > 0$, alors*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in K) \leq - \inf_{\varphi\in K} I_T(\varphi). \tag{2.15}$$

La majoration dans l'inégalité (2.15) est une conséquence immédiate de la Proposition 15.

preuve Cette preuve sera divisée en deux parties : dans un premier temps on étudie la probabilité de l'événement

$$A := \{\varphi : \rho(\varphi,\Phi^{(n)}(s)) > \delta\},$$

où $\delta > 0$, ρ est la distance liée à la norme uniforme et $\Phi^{(n)}(s) = \{\varphi \in \mathcal{C}([0,T]) : I_T^{(n)} \leq s\}$. Puis, dans un second temps, on estime la probabilité avec laquelle la diffusion X^ε appartient à un compact.

i) En utilisant la formule de Girsanov et la définition (2.13), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{E}\left[\chi\left(\rho(\varepsilon B,\Phi^{(n)}(s)) > \delta\right) e^{\xi_T}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\chi\left(\rho(\varepsilon B,\Phi^{(n)}(s)) > \delta\right) \chi\left(|\xi_T^{(n)} - \xi_T| < \alpha\right) e^{\xi_T}\right] \\ &\quad +\mathbb{E}\left[\chi\left(\rho(\varepsilon B,\Phi^{(n)}(s)) > \delta\right) \chi\left(|\xi_T^{(n)} - \xi_T| \geq \alpha\right) e^{\xi_T}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\chi\left(\rho(\varepsilon B,\Phi^{(n)}(s)) > \delta\right) e^{\xi_T^{(n)}}\right] e^{\alpha} + \mathbb{E}\left[\chi\left(|\xi_T^{(n)} - \xi_T| \geq \alpha\right) e^{\xi_T}\right]. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}\left(\rho(X^{(n)},\Phi^{(n)}(s)) > \delta\right) e^{\alpha} + \mathbb{P}(|\xi_T^{(n)} - \xi_T| \geq \alpha)^{1/2}\mathbb{E}[e^{2\xi_T}]^{1/2}.$$

Or, par la théorie de Freidlin et Wentzell, on sait que, pour $h > 0$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n,\delta,h)$,

$$\mathbb{P}\left(\rho(X^{(n)},\Phi^{(n)}(s)) > \delta\right) \leq e^{-(s-h)/2\varepsilon^2}.$$

Par un raisonnement similaire à celui de la minoration dans la preuve de la Proposition 14, c'est-à-dire en utilisant l'estimation (2.13) et la bornitude de $\varepsilon^2 \ln \mathbb{E}[e^{2\xi_T}]$ uniformément en ε (identique à (2.14)), on obtient l'estimation suivante, pour n assez grand,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\rho(\varphi,\Phi^{(n)}(s)) > \delta) \leq -s.$$

ii) Soit K un compact de $(\mathcal{C}([0,T]),\|.\|_\infty)$. Comme I_T est une bonne fonctionnelle d'action, son minimum sur le compact est atteint. De plus, $I_T^{(n)}$ converge vers I_T lorsque n tend vers l'infini, ce qui entraîne que, pour $\eta > 0$, n assez grand et en choisissant $2\delta = \rho(K,\Phi^{(n)}(\inf_{\varphi\in K} I_T(\varphi) - \eta))$,

$$\mathbb{P}(X^\varepsilon \in K) \leq \mathbb{P}\left(\rho(X^\varepsilon,\Phi^{(n)}(\inf_{\varphi\in K} I_T(\varphi) - \eta)) > \delta\right).$$

Ainsi,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(X^\varepsilon \in K) \leq -\inf_{\varphi\in K} I_T(\varphi) + \eta.$$

En faisant tendre η vers zéro, on en déduit (2.15). QED

Les sections 2.1 et 2.2 démontrent donc un Principe de Grandes Déviations pour la diffusion (2.1) avec une vitesse exponentielle en ε^2.

2.3 Comportement au voisinage d'une solution non extrémale

Dans cette section, on se place dans un voisinage d'une solution non extrémale du système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = \mathrm{b}(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{array}\right. \tag{2.16}$$

On choisit le voisinage de sorte qu'il ne contienne aucune solution extrémale et on étudie la probabilité que la diffusion (1) appartienne à ce voisinage.

preuve du Théorème 7

Soit φ une solution du système (2.16), telle que $K^{-1}(T) - |\varphi(T)| > 0$, où K^{-1} est la fonction réciproque de $\int_0^x \frac{dy}{b(y)}$ et soit $0 < \delta < K^{-1}(T) - |\varphi(T)|$.

i) Soit $0 < \eta < \delta$. On considère alors l'ensemble suivant :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_\eta & = & \{f \in \mathcal{C}([0,T]) \ t.q. \ \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - \varphi(t)| \geq \delta\} \\ & \cap & \{f \in \mathcal{C}([0,T]) \ t.q. \ f(T) \in [\varphi(T) - \delta + \eta, \varphi(T) + \delta - \eta]\}. \end{array}$$

Γ_η est un ensemble fermé pour la topologie uniforme. Ainsi, puisque I_T est une bonne fonctionnelle d'action (Corollaire 1), son minimum sur Γ_η est atteint en une certaine fonction $f_0 \in H^1 \cap \Gamma_\eta$. On suppose que ce minimum est nul. f_0 est alors une solution du système dynamique (2.16). De plus $f_0(T) \in [\varphi(T) - \delta + \eta, \varphi(T) + \delta - \eta]$ puisque $f_0 \in \Gamma_\eta$. On en déduit donc que $|f_0(t) - \varphi(t)| < \delta - \eta$ pour tout $t < T$. En effet, $|f_0(t) - \varphi(t)|$ est une fonction strictement croissante pour f_0 différente de φ car b est une fonction strictement croissante. On arrive alors à une absurdité : f_0 ne peut pas appartenir à Γ_η. On en déduit donc que $\inf_{f\in\Gamma_\eta} I_T(f) > 0$.

ii) En utilisant la décomposition :

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| \leq \delta\right) = \mathbb{P}\left(|X_T^\varepsilon - \varphi(T)| \leq \delta\right) \\ -\mathbb{P}\left(\{|X_T^\varepsilon - \varphi(T)| \leq \delta\} \cap \left\{\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| > \delta\right\}\right), \end{array}$$

et l'inégalité

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}\left(\{|X_T^\varepsilon - \varphi(T)| \leq \delta\} \cap \left\{\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| > \delta\right\}\right) \\ \qquad \leq \mathbb{P}(X^\varepsilon \in \Gamma_\eta) + \mathbb{P}(|X_T^\varepsilon - \varphi(T)| \in]\delta - \eta, \delta]), \end{array}$$

on en déduit par i) et par le principe de Grandes Déviations (Théorème 6) que, pour η suffisamment petit:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \ln \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| \leq \delta\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \ln \mathbb{P}\left(|X_T^\varepsilon - \varphi(T)| \leq \delta\right).$$

On considère un premier cas : la boule uniforme $\overline{B(\varphi,\delta)}$ ne contient pas la fonction identiquement nulle. Alors, comme la densité de la diffusion vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \ln p_T^\varepsilon(x) = \lambda_1 \left(K(|x|) - T\right),$$

où λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger lié au potentiel (1.13) (voir Proposition 6), et comme cette convergence est uniforme sur tout compact de $]-K^{-1}(T),0[\cup]0,K^{-1}(T)[$, on obtient par la méthode de Laplace (2.5).
Dans le second cas, c'est-à-dire si $\overline{B(\varphi,\delta)}$ contient la fonction identiquement nulle, il suffit d'enlever un voisinage $B(0,\eta)$, d'appliquer le raisonnement précédent, puis de faire tendre η vers zéro. On obtient alors (2.5) par monotonie. QED

Références

[A-S] M. Abramowitz et A. Stegun, *Pocket book of mathematical functions*, Verlag Harri Deutsch, 1984.

[B] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer Verlag, 1994.

[B-B] R. Bafico et P. Baldi, *Small Random Perturbations of Peano Phenomena*, Stochastics, **6**, (1982), pp. 279-292.

[B-R] P. Baldi et B. Roynette, *Some exact equivalents for the Brownian motion in Holder norm*, Probab. Theory Relat. Fields, **93** (1992), pp. 457-484.

[Ca] R. Carmona, *Regularity Properties of Schrödinger and Dirichlet Semigroups*, J. Funct. Analysis, **33** (1979), pp. 259-296.

[Ci] Z. Ciesielski, *On the Isomorphisms of the Spaces H_α and m*, Bull. Acad. Pol. Sci., **8** (1960), pp. 217-222.

[D1] E. B. Davies, *Properties of the Green's functions of some Schrödinger operators*, J. London Math. Soc.(2), **7** (1973), pp. 483-491.

[D2] E. B. Davies, *One-parameter semigroups*, Academic Press, 1980

[D-S] E. B. Davies et B. Simon, *Ultracontractivity and the Heat Kernel for Schrödinger Operators and Dirichlet Laplacians*, J. Funct. Analysis, **59** (1984), pp. 335-395.

[De-S] J. D. Deuschel et D. W. Stroock, *Large Deviations*, Academic Press, 1989

[D-Z] A.Dembo et O.Zeitouni, *Large deviations techniques and applications*, Jones and Barlett books in Mathematic, (1993)

[Fl] W.H. Fleming, *Controlled Markov Processes and viscisity solutions*, Springer-Verlag, 1993

[F-W] M.I. Freidlin et A.D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems* Springer-Verlag, New-York, 1984.

[G-H-R] M. Gradinaru, S. Herrmann et B. Roynette, *A singular Large Deviations phenomenon*, Prépublication de l'Institut Elie Cartan, 1999, n 37.

[I-MK] K. Ito et H. P. McKean, *Diffusion Processes and their Sample Paths*, 2nd printing, Springer Verlag, 1974.

[J-L] G. Jona-Lasinio, *Large Deviations for Weak Solutions of Stochastic Differential Equations*, Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics, and applications (Oslo, 1988), pp. 162-167 Cambridge Univ-Press, Cambridge, 1992.

[K] M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium. of Math. Statist. Probab. 1950, pp. 189-215, University of California Press, 1951.

[K-S] I. KARATZAS et S. E. SHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer Verlag, 1991.

[R-S1] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, 1979.

[R-S2] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

[R-Y] D. REVUZ et M. YOR, *Continuous Martingales and Brownian motion*, 2nd edition, Springer Verlag, 1994

[Ri] S. O. RICE, *The integral of the absolute value of the pinned Wiener process calculation of its probability density by numerical integration*, Ann. Prob., **10** (1982), pp. 240-243.

[Ro] M. ROSENBLATT, *On a class of Markov Processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **71** (1951), pp. 120-135.

[Sh] L. A. SHEPP, *On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process*, Ann. Prob., **10** (1982), pp. 234-239.

[V] S.R.S. VARADHAN, *Large Deviations and Applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, **46**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1984.

Deuxième partie

Système de processus autostabilisants non linéaires

Introduction

Soient $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire et croissante, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire et bornée, $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements browniens indépendants tels que $B_0 = \tilde{B}_0 = 0$ et une constante $1/2 \leq a < 1$. Nous nous intéressons alors au système d'équations suivant :

$$(E) \quad \begin{cases} X_t = X_0 + B_t + a\displaystyle\int_0^t \phi * v_s(X_s)ds - (1-a)\int_0^t \beta * u_s(X_s)ds \\ Y_t = Y_0 + \tilde{B}_t + (1-a)\displaystyle\int_0^t \phi * u_s(Y_s)ds - a\int_0^t \beta * v_s(Y_s)ds \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_t \in dx) = u_t(dx) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_t \in dx) = v_t(dx),$$

où le produit de convolution est défini de la manière suivante

$$\beta * u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \beta(x-y)u_t(dy).$$

Dans le système (E), nous avons en fait quatre inconnues : les processus stochastiques X_t et Y_t et leurs densités $u_t(x)$ et $v_t(x)$. Ce système peut également s'écrire sous la forme du système d'équations différentielles stochastiques suivant

$$(E') \quad \begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \displaystyle\int_0^t r_1(s,X_s)ds \\ Y_t = Y_0 + \tilde{B}_t - \displaystyle\int_0^t r_2(s,Y_s)ds \end{cases}$$

où

$$r_1(s,x) = \mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_s) - a\phi(x-Y_s)]$$
$$r_2(s,x) = \mathbb{E}[a\beta(x-Y_s) - (1-a)\phi(x-X_s)]$$

Les deux processus aléatoires qui forment la solution de ce système sont bien sûr indépendants, puisque la position de X_t (respectivement de Y_t) ne dépend que de la loi de Y (X).
De telles E.D.S. ont déjà été étudiées en détail, entre autres par Benachour-Roynette-Vallois (dont l'article a largement inspiré les démonstrations qui suivront), mais la présence d'un système d'équations dans ce cas le rend particulier. Ce système d'équations nous provient de la propagation du chaos dans un système de particules

$$(X_t^{1,N_n}, X_t^{2,N_n}, \ldots, X_t^{N_n,N_n}, Y_t^{1,M_n}, \ldots, Y_t^{M_n,M_n})$$

(N_n et M_n sont, ici, deux suites d'entiers tendant vers l'infini quand $n \to \infty$) dont les particules sont de deux natures différentes X et Y. L'interaction entre les particules est la suivante : deux particules de même nature s'attirent et deux particules de nature différente se repoussent.
Nous nous intéresserons donc au système de particules suivant (F) et à sa convergence quand le nombre de particules tend vers l'infini.

$$(F)\left\{\begin{aligned} X_t^{i,N_n} &= X_0^i + B_t^i - \frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n} \beta(X_s^{i,N_n} - X_s^{j,N_n})ds \\ &+\frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^{i,N_n} - Y_s^{k,M_n})ds,\ \ 1 \leq i \leq N_n \\ Y_t^{i,M_n} &= Y_0^i + \tilde{B}_t^i - \frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} \beta(Y_s^{i,M_n} - Y_s^{j,M_n})ds \\ &+\frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t \sum_{k=1}^{N_n} \phi(Y_s^{i,M_n} - X_s^{k,N_n})ds,\ \ 1 \leq i \leq M_n. \end{aligned}\right.$$

$(B_t^1,..,B_t^{N_n})$, $(\tilde{B}_t^1,..,\tilde{B}_t^{M_n})$ sont deux mouvements brownien indépendants.
Cette partie concernant l'étude d'un système de processus autostabilisants non linéaires est découpée en deux chapitres, le premier est consacré à l'étude du système (E), le second à celle du système (F). Le plan est construit comme suit :
dans un premier paragraphe, nous exposerons toutes les conditions imposées sur les fonctions β et ϕ qui seront, sans doute, loin d'être optimales. Nous supposerons, entre autres, que β est continue croissante à croissance polynômiale et impaire, et que ϕ est impaire Lipschitzienne et bornée. Nous commencerons alors dans une première partie par étudier le système (E), c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'une solution. La preuve de ce résultat n'exigera que la bornitude de certains moments de X_0 et de Y_0. Puis nous étudierons l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire, c'est-à-dire une solution $(u(x)dx,v(x)dx)$ au système

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\frac{\partial}{\partial x}[(\phi * v)u] + (1-a)\frac{\partial}{\partial x}[(\beta * u)u] = 0 \\ \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-a)\frac{\partial}{\partial x}[(\phi * u)v] + a\frac{\partial}{\partial x}[(\beta * v)v] = 0. \end{array}\right.$$

Si l'existence ne demande pas de condition supplémentaire à celles définies au départ, nous supposerons par contre pour montrer l'unicité que β se décompose de la manière suivante

$$\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$$

où β_0 est une fonction paire croissante convexe telle que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\beta_0(x)}{x} = 0$ et $\alpha > 0$ assez grand. De plus, si β_0 croît plus vite que $|x|^\rho$ pour $\rho > 1$ et si ϕ est concave, alors nous montrerons dans le paragraphe 3 que la solution (X_t,Y_t) converge en loi lorsque le temps tend vers l'infini vers $(u(x)dx,v(x)dx)$. Pour clore l'étude du système (E), nous verrons que, pour $a \neq 1/2$, les densités u et v des lois stationnaires sont clairement distinctes et nous donnerons également une vitesse de séparation des lois de X_t et de Y_t au voisinage

de l'origine, lorsque X_0 et Y_0 ont la même loi.
Enfin, dans un deuxième chapitre, nous verrons qu'il y a propagation du chaos dans le système à infinité de particules (F) : c'est-à-dire que la suite de mesures empiriques

$$\left(\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\delta_{X_t^{i,N_n}},\frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n}\delta_{X_t^{i,M_n}}\right),$$

définie sur $\mathcal{C}([0,T])$, T fixé, converge en loi quand n tend vers l'infini, vers une mesure déterministe $\mu\otimes\nu$, où $\mu_t(dx)=u_t(x)dx$ et $\nu_t(dx)=v_t(x)dx$ (u et v étant les densités du couple solution du système (E)). Ceci permettra donc d'approcher la loi de la solution du système (E) en simulant des particules, solutions du système (F). Nous donnerons, pour finir, une inégalité de concentration pour la loi des particules. Cette inégalité provient de la théorie développée autour de l'inégalité de Sobolev logarithmique (voir, par exemple [A-co] et [M]). Nous montrerons en particulier qu'il existe une constante $K_T>0$ telle que, pour toute fonction lipschitzienne vérifiant

$$\inf\{M>0;\ \forall\ x,y\ \in\mathbb{R}^d,\ |\ f(x)-f(y)|\leq\ M|\ x-y|\}\leq\ 1,$$

nous avons

$$\sup_{t\leq T}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}f(X_t^{i,N_n})-\int_{\mathbb{R}}f(y)u_t(y)dy\right|\geq r+\sqrt{\frac{K_T}{N_n}}\right)\leq 2\exp-\frac{N_nr^2}{4C_T},$$

pour tout $r\geq 0$. $C_T=(e^{4\|\phi'\|_\infty T}-1)/\|\phi'\|_\infty$ et $u_t(x)dx$ est la loi de $\bar{X}_t$ solution de l'équation (E). De même,

$$\sup_{t\leq T}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n}f(Y_t^{i,M_n})-\int_{\mathbb{R}}f(y)v_t(y)dy\right|\geq r+\sqrt{\frac{K_T}{M_n}}\right)\leq 2\exp-\frac{M_nr^2}{4C_T},$$

où $v_t(x)dx$ est la loi de $\bar{Y}_t$ solution de (E).

Chapitre 1

Etude du système (E)

Préliminaires

Voici tout d'abord quelques notations et quelques hypothèses dont on se servira tout au long de cette étude.
Les hypothèses concernant β :
$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante, à croissance polynômiale et impaire. De plus, il existe $\beta_1 > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $C > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\beta(x) - \beta(y) \geq \beta_1(x - y) + \beta_0, \quad \text{pour tout } x \geq y, \tag{1.1}$$

$$|\beta(x) - \beta(y)| \leq |x - y|(c + |x|^r + |y|^r), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad \text{et } y \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$|\beta(x)| \leq C(1 + |x|^{2q}), \quad 2q \geq r + 1 \ ; \tag{1.3}$$

et celles concernant la fonction ϕ :
$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne de paramètre $K > 0$, bornée par $M_\phi > 0$ et impaire, telle que $\mathrm{sgn}(x)\phi(x) \geq 0$.

1.1 Existence et unicité des solutions du système (E)

Cette partie a pour but de montrer l'existence et l'unicité d'une solution du système (E), qui n'est pas évidente a priori, puisque la différentielle de X_t dépend de la position de X_t mais aussi de la loi de Y_t et réciproquement. On utilisera donc une méthode de point fixe pour déterminer une solution. Le résultat principal de cette partie est contenu dans le théorème suivant :

Théorème 1 *Soient X_0 et Y_0, deux variables aléatoires de lois symétriques, telles que $\mathbb{E}[X_0^{2(r+1)^2}] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y_0^{2(r+1)^2}] < \infty$. On suppose, de plus que $\beta_1 > \frac{1-a}{a}K$ où $1/2 \leq a < 1$.*

Le système (E) admet alors une unique solution forte.

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t + a\displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(X_s - x)v_s(x)dxds - (1-a)\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \beta(X_s - x)u_s(x)dxds \\ Y_t = Y_0 + \tilde{B}_t + (1-a)\displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(Y_s - x)u_s(x)dxds - a\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \beta(Y_s - x)v_s(x)dxds, \end{cases} \tag{1.4}$$

où B_t et $\tilde{B}_t$ sont deux mouvements browniens indépendants.
$u_t(x)dx$ (respectivement $v_t(x)dx$) est la loi de X_t (resp. Y_t).

Pour pouvoir démontrer ce résultat, on a besoin d'introduire certains espaces fonctionnels

1) On note Λ_T l'ensemble des fonctions $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
   $x \to b(t,x)$ est croissante
   $b(t,\bullet)$ est localement Lipschitz, uniformément par rapport à t sur $[0,T]$,

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq c_n|x-y|, \text{ pour } |x| \leq n, \; |y| \leq n, \; t \in [0,T], \tag{1.5}$$

$$b(t,x) - b(t,y) \geq (1-a)\beta_1(x-y) + (1-a)\beta_0, \text{ pour } x \geq y \text{ et } t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

   Ces fonctions vérifient de plus

$$\|b\|_T = \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|b(t,x)|}{1+|x|^{2q}} < \infty. \tag{1.7}$$

   Λ_T est muni de la norme $\|.\|_T$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalement lipschitziennes et bornées par aM.
   Cet espace est muni de la norme

$$\|b\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |b(t,x)|. \tag{1.8}$$

3) On notera enfin $F_T = \Lambda_T \times \Lambda_T \times E \times E$ muni de la norme

$$\|\underline{b}\|_T^F = \sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_T + \sum_{i=3}^{4} \|b_i\|_\infty, \tag{1.9}$$

   où $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$.

En plus de tous ces espaces fonctionnels on va utiliser la transformation $\Gamma : F_T \to F_T$ définie par ses coordonnées

$$\begin{aligned} p_1 o\Gamma(\underline{b})(x) &= \mathbb{E}[(1-a)\beta(x - X_t^b)] \\ p_2 o\Gamma(\underline{b})(x) &= \mathbb{E}[a\beta(x - Y_t^b)] \\ p_3 o\Gamma(\underline{b})(x) &= \mathbb{E}[a\phi(x - Y_t^b)] \\ p_4 o\Gamma(\underline{b})(x) &= \mathbb{E}[(1-a)\phi(x - X_t^b)] \end{aligned} \tag{1.10}$$

où p_i est la $i$ème projection dans l'espace F_T et X_t^b (resp. Y_t^b) est solution de l'E.D.S.

$$dX_t^b = dB_t - b_1(t,X_t^b)dt + b_3(t,X_t^b)dt, \tag{1.11}$$

respectivement

$$dY_t^b = d\tilde{B}_t - b_2(t,Y_t^b)dt + b_4(t,Y_t^b)dt. \tag{1.12}$$

Pour montrer qu'il existe des solutions aux équations qui viennent d'être citées, il sera important d'utiliser le résultat suivant (cf Stroock et Varadhan [S-V] 1979 Théorème 10.2.2 p.255) :

Proposition 1 *Soit* $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$$\sup_{t \geq 0} |b(t,0)| < \infty, \tag{1.13}$$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq c_n|x-y|, \quad pour\ n \in \mathbb{N},\ \ |x| \leq n,\ \ |y| \leq n, \tag{1.14}$$

et $\mathrm{sgn}(x)b(t,x) \geq 0$ *pour* $|x|$ *assez grand, alors l'E.D.S. suivante a une unique solution forte*

$$X_t^b = X_0 + B_t - \int_0^t b(s,X_s^b)ds.$$

Pour montrer que le système (1.4) a une unique solution, on cherche un point fixe à la transformation Γ. Pour ce faire, on vérifie, dans un premier temps, que, pour $\underline{b} \in F_T$, les équations (1.11) et (1.12) admettent une unique solution forte.
Or, comme b_3 et b_4 sont bornées et $\underline{b} \in F_T$, il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $|x| \geq x_0$,

$$\mathrm{sgn}(x)(b_1(t,x) - b_3(t,x)) \geq 0,$$

$$\mathrm{sgn}(x)(b_2(t,x) - b_4(t,x)) \geq 0, \ \ \text{pour} \ \ t \in [0,T].$$

Par ailleurs, les b_i sont localement Lipschitziennes pour $i = 1,2,3$ et 4. On peut alors appliquer la Proposition 1. On en déduit que les équations (1.11) et (1.12) admettent une unique solution forte.
Pour la suite, on utilise les notations suivantes :

$$\overline{X}_t^{m,b} = \mathbb{E}[|X_t^b|^m], \qquad \overline{Y}_t^{m,b} = \mathbb{E}[|Y_t^b|^m],$$

$$\widehat{X}_t^{m,b} = \sup_{s \leq t} \overline{X}_s^{m,b}, \qquad \widehat{Y}_t^{m,b} = \sup_{s \leq t} \overline{Y}_s^{m,b}.$$

Pour démontrer le Théorème 1, on a besoin de plusieurs lemmes :

Lemme 1 *Soient* $\underline{b} \in F_T$, $n \geq 1$, $\rho = (\rho_0,\rho_0,0,0)$ *où* $\rho_0(t,x) = \beta_0 x$, *alors* $\widehat{X}_T^{2n,\rho} < \infty$ *et* $\widehat{Y}_T^{2n,\rho} < \infty$, *pour* $n \geq 0$ *tel que* $\mathbb{E}[|X_0|^{2n}] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[|Y_0|^{2n}] < \infty$.
De plus

$$\begin{aligned} \widehat{X}_T^{2n,b} &\leq k_1(n)\{\widehat{X}_T^{2n,\rho} + T^{2n} \textstyle\sum_{i=1}^{2n} c_i \|b_1 - \rho_0\|_T^i (1 + \widehat{X}_T^{2qi,\rho})\}, \\ \widehat{Y}_T^{2n,b} &\leq k_2(n)\{\widehat{Y}_T^{2n,\rho} + T^{2n} \textstyle\sum_{i=1}^{2n} d_i \|b_1 - \rho_0\|_T^i (1 + \widehat{Y}_T^{2qi,\rho})\}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

où les c_i, d_i *sont des constantes ne dépendant ni de* $\underline{b}$ *ni de* ρ *ni de* T.

Preuve :
i) En considérant $\rho = (\rho_0,\rho_0,0,0)$, on a alors l'équation suivante :

$$X_t = X_0 + B_t - \int_0^t \beta_0 X_s ds.$$

Or $X_t = X_0 e^{-\beta_0 t} + Z_t$ où :

$$Z_t = e^{-\beta_0 t} \int_0^t e^{\beta_0 s} dB_s.$$

Z_t est alors une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance $(1 - e^{-2\beta_0 t})/2\beta_0$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[(X_t - e^{-\beta_0 t} X_0)^{2n}] \leq \left(\frac{1 - e^{-2\beta_0 t}}{2\beta_0} \right)^n \mathbb{E}[(B_1)^{2n}].$$

On en déduit donc :

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t^\rho|^{2n}] \leq c_n (1 + \mathbb{E}[|X_0|^{2n}])$$

où les c_n sont des constantes (le même raisonnement est valable pour Y). Donc, si $\mathbb{E}[|X_0|^{2n}]$ et $\mathbb{E}[|Y_0|^{2n}]$ sont finis, il s'en suit que $\widehat{X}_T^{2n,\rho} < \infty$ et $\widehat{Y}_T^{2n,\rho} < \infty$.
ii) Par ailleurs,

$$X_t^b - X_t^\rho = - \int_0^t (b_1(s,X_s^b) - p_1 o\rho(s,X_s^\rho)) ds + \int_0^t (b_3(s,X_s^b) - p_3 o\rho(s,X_s^\rho)) ds,$$

d'où, pour $\alpha > 1$, on obtient

$$|X_t^b - X_t^\rho|^\alpha = -\alpha \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\rho) |X_s^b - X_s^\rho|^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\{X_s^b \neq X_s^\rho\}} (b_1(s,X_s^b) - p_1 o\rho(s,X_s^\rho)) ds$$

$$+\alpha \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\rho) |X_s^b - X_s^\rho|^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\{X_s^b \neq X_s^\rho\}} (b_3(s,X_s^b) - p_3 o\rho(s,X_s^\rho)) ds.$$

En prenant la limite quand $\alpha \to 1^+$, on a alors

$$|X_t^b - X_t^\rho| = - \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\rho)(b_1(s,X_s^b) - p_1 o\rho(s,X_s^\rho)) ds$$

$$+ \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\rho)(b_3(s,X_s^b) - p_3 o\rho(s,X_s^\rho)) ds.$$

Comme b_1 est une fonction croissante, $\operatorname{sgn}(x-y)(b_1(s,x) - b_1(s,y)) \geq 0$. On obtient donc

$$|X_t^b - X_t^\rho| \leq - \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\rho)(b_1(s,X_s^\rho) - p_1 o\rho(s,X_s^\rho)) ds$$

$$+ \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\rho)(b_3(s,X_s^b) - p_3 o\rho(s,X_s^\rho)) ds.$$

Or, $p_3 o\rho$ est identiquement nul et b_3 est borné par $(1-a)M$, ce qui implique

$$\begin{aligned}|X_t^b - X_t^\rho| &\leq (1-a)Mt + \int_0^t \|b_1 - p_1 o\rho\|_T (1 + |X_s^\rho|^{2q}) ds \\ &\leq (1-a)Mt + \|b_1 - p_1 o\rho\|_T \int_0^t (1 + |X_s^\rho|^{2q}) ds.\end{aligned}$$

Par un argument de convexité, on obtient

$$\mathbb{E}[|X_t^b|^{2n}] \leq k_1(n) \left\{ \mathbb{E}[|X_t^\rho|^{2n}] + \mathbb{E}\left[\left\{ (1-a)MT + \|b_1 - p_1 o\rho\|_T \int_0^t (1 + |X_s^\rho|^{2q}) ds \right\}^{2n} \right] \right\}.$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (1 + |X_s^\rho|^{2q}) ds \right)^m \right] \leq k(m) T^m (1 + \widehat{X}_T^{\rho,m}),$$

où $k(m)$ est une constante. On en déduit la première formule de (1.14) où les c_i sont des constantes qui ne dépendent que de a, M et n. On peut alors effectuer les mêmes calculs pour obtenir la deuxième formule. **QED**

Pour continuer les calculs, on a besoin d'introduire un lemme plutôt technique qui s'apparente à un lemme de Gronwall.

Lemme 2 *Soit ϕ une fonction positive telle que $\phi(0) = 0$. On suppose qu'il existe deux constantes $b > 0$ et $c \geq 0$ telles que*

$$\phi(t) \leq b \int_0^t \phi(s) ds + c \int_0^t \sqrt{\phi(s)} ds,$$

alors

$$\phi(t) \leq \left\{ \frac{c}{b} (e^{bt/2} - 1) \right\}^2. \tag{1.16}$$

Preuve : On pose ψ la solution non nulle de l'équation

$$\psi(t) = b \int_0^t \psi(s) ds + c \int_0^t \sqrt{\psi(s)} ds.$$

Par dérivation, on a

$$\frac{d\psi(t)}{b\psi(t) + c\sqrt{\psi(t)}} = dt,$$

puis, en prenant la primitive dans cette égalité, et en utilisant la condition initiale $\psi(0) = 0$, on trouve

$$\psi(t) = \left\{ \frac{c}{b} (e^{bt/2} - 1) \right\}^2.$$

Pour terminer la preuve de ce lemme, on fait appel à un résultat dans [B] (Théorème 4.1 p.16) qui assure $\phi(t) \leq \psi(t)$. **QED**

Lemme 3 *1. Γ est une application de F_T dans F_T et*

$$\|\Gamma b\|_T^F \leq M + k_3 (1 + \widehat{X}_T^{b,2q} + \widehat{Y}_T^{b,2q}). \tag{1.17}$$

2. Γ *est continue et vérifie*

$$\begin{array}{l}\|p_1o\Gamma(\underline{b}) - p_1o\Gamma(\underline{c})\|_T \leq k_4(e^{(1-a)KT}-1)(\|b_1-c_1\|_T + \|b_3-c_3\|_\infty)\\ \|p_2o\Gamma(\underline{b}) - p_2o\Gamma(\underline{c})\|_T \leq k_5(e^{(1-a)KT}-1)(\|b_2-c_2\|_T + \|b_4-c_4\|_\infty)\\ \|p_3o\Gamma(\underline{b}) - p_3o\Gamma(\underline{c})\|_\infty \leq k_6Te^{(1-a)KT}(\|b_2-c_2\|_T + \|b_4-c_4\|_\infty)\\ \|p_4o\Gamma(\underline{b}) - p_4o\Gamma(\underline{c})\|_\infty \leq k_7Te^{(1-a)KT}(\|b_1-c_1\|_T + \|b_3-c_3\|_\infty),\end{array} \tag{1.18}$$

où k_i *sont des constantes.*

Preuve :

1) Comme β est une fonction continue et croissante, $\mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t^b)]$ est croissante en x. Par ailleurs elle est localement lipschitzienne et vérifie, par (1.1),

$$\mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t^b) - (1-a)\beta(y-X_t^b)] \quad \geq \quad (1-a)(\beta_1(x-y)+\beta_0) \quad \text{pour } x \geq y$$

Enfin,

$$\mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t^b)] \leq \mathbb{E}[C(1-a)(1+|x|^{2q}+|X_t^b|^{2q})]$$
$$\leq C(1-a)(1+|x|^{2q})\mathbb{E}[1+|X_t^b|^{2q}] = C(1-a)(1+|x|^{2q})(1+\widehat{X}_T^{b,2q}).$$

D'où

$$\|p_1o\Gamma(\underline{b})\|_T \leq C(1-a)(1+\widehat{X}_T^{b,2q}). \tag{1.19}$$

De la même manière,

$$\|p_2o\Gamma(\underline{b})\|_T \leq aC(1+\widehat{Y}_T^{b,2q}), \tag{1.20}$$
$$\|p_3o\Gamma(\underline{b})\|_\infty \leq aM,$$
$$\|p_4o\Gamma(\underline{b})\|_\infty \leq (1-a)M.$$

On en déduit alors (1.17). Comme $p_3o\Gamma$ et $p_4o\Gamma$ tendent vers 0 à l'infini, ces expressions sont globalement Lipschitziennes et bornées ce qui justifie entièrement 1).

2) On prouve maintenant la deuxième partie du lemme, et plus particulièrement, les deux dernières inégalités énoncées. Par la propriété de Lipschitz de ϕ (cf les préliminaires) on a

$$|p_3o\Gamma(\underline{b})(x) - p_3o\Gamma(\underline{c})(x)| \leq a\mathbb{E}[|\phi(x-Y_t^b) - \phi(x-Y_t^c)|] \leq aK\mathbb{E}[|Y_t^b - Y_t^c|],$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or, d'après la démonstration du Lemme 1,

$$\begin{aligned}|Y_t^b - Y_t^c| \quad &\leq \quad (1-a)K\int_0^t |Y_s^b - Y_s^c|ds + \int_0^t |b_4(s,Y_s^c) - c_4(s,Y_s^c)|ds\\ &\quad\quad + \|b_2-c_2\|_T\int_0^t (1+|Y_s^c|^{2q})ds\\ &\leq \quad (1-a)K\int_0^t |Y_s^b - Y_s^c|ds + T\|b_4-c_4\|_\infty + \|b_2-c_2\|_T\int_0^t(1+|Y_s^c|^{2q})ds.\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[|Y_t^b - Y_t^c|] \leq (1-a)K\int_0^t \mathbb{E}[|Y_s^b - Y_s^c|]ds + T\|b_4-c_4\|_\infty + \|b_2-c_2\|_T(1+\widehat{Y}_T^{c,2q}).$$

Par le lemme de Gronwall, on trouve

$$\mathbb{E}[|Y_t^b - Y_t^c|] \leq T(1+\widehat{Y}_T^{c,2q})\left\{\|b_2 - c_2\|_T + \|b_4 - c_4\|_\infty\right\} e^{(1-a)KT},$$

et ainsi

$$\|p_3 o\Gamma(\underline{b}) - p_3 o\Gamma(\underline{c})\|_\infty \leq k_6 T e^{(1-a)KT}\left\{\|b_2 - c_2\|_T + \|b_4 - c_4\|_\infty\right\},$$

où $k_6 = aK(1+\widehat{Y}_T^{c,2q})$. On obtient de la même manière la dernière inégalité de (1.18) avec k_7 dépendant de a, K et $(1+\widehat{X}_T^{c,2q})$.

3) On montre enfin les deux premières inégalités de (1.18). En utilisant l'hypothèse (1.2) sur β, on a

$$\begin{aligned}
|p_1 o\Gamma(\underline{b})(x) - p_1 o\Gamma(\underline{c})(x)| &= |\mathbb{E}[(1-a)(\beta(x - X_t^b) - \beta(x - X_t^c)]| \\
&\leq (1-a)\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|(c + |x|^r + |X_t^b|^r + |X_t^c|^r)] \\
&\leq (1-a)k_8(1+|x|^r)\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|(1 + |X_t^b|^r + |X_t^c|^r)] \\
&\leq k_9(1+|x|^r)\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|^2]^{1/2}[(1+\mathbb{E}[|X_t^b|^{2r}] + \mathbb{E}[|X_t^c|^{2r}])]^{1/2},
\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Il faut alors calculer $|X_t^b - X_t^c|^2$:

$$\begin{aligned}
|X_t^b - X_t^c|^2 &= -2\int_0^t (X_s^b - X_s^c)(b_1(s,X_s^b) - c_1(s,X_s^c))ds \\
&\quad +2\int_0^t (X_s^b - X_s^c)(b_3(s,X_s^b) - c_3(s,X_s^c))ds \\
&\leq -2\int_0^t (X_s^b - X_s^c)(b_1(s,X_s^c) - c_1(s,X_s^c))ds + 2(1-a)K\int_0^t |X_s^b - X_s^c|^2 ds \\
&\quad +2\|b_3 - c_3\|_\infty \int_0^t |X_s^b - X_s^c| ds \\
&\leq 2\|b_1 - c_1\|_T \int_0^t |X_s^b - X_s^c|(1+|X_s^c|^{2q})ds + 2(1-a)K\int_0^t |X_s^b - X_s^c|^2 ds \\
&\quad +2\|b_3 - c_3\|_\infty \int_0^t |X_s^b - X_s^c| ds.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|^2] &\leq 2\|b_1 - c_1\|_T \int_0^t (1+\mathbb{E}[|X_s^c|^{4q}])^{1/2}\mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]^{1/2} ds \\
&\quad +2(1-a)K\int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2] ds \\
&\quad +2\|b_3 - c_3\|_\infty \int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]^{1/2} ds \\
&\leq k_{10}(\|b_1 - c_1\|_T + \|b_3 - c_3\|_\infty)\int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]^{1/2} ds \\
&\quad +2(1-a)K\int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2] ds.
\end{aligned}$$

Puis, par application du Lemme 2, on trouve

$$\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|^2] \leq k_{11}(e^{(1-a)KT} - 1)(\|b_1 - c_1\|_T + \|b_3 - c_3\|_\infty),$$

d'où la première équation de (1.18), avec k_4 qui dépend de $\widehat{X}_T^{c,4q}$, $\widehat{X}_T^{b,2r}$ et $\widehat{X}_T^{c,2r}$. La même démonstration est bien-entendu valable pour p_2. **QED**

Voici un premier résultat d'existence et d'unicité des solutions du système (E) :

Lemme 4 *Soit* $L \geq 2aC(1 + \max(k_1(q)\widehat{X}_\infty^{2q,\rho}, k_2(q)\widehat{Y}_\infty^{2q,\rho}))$ *et* $\Lambda_T^L = \Lambda_T \cap \{b, \| b\|_T \leq \ L\}$. *On définit* $F_T^L = \Lambda_T^L \times \Lambda_T^L \times E \times E$. *Il existe* k_{12} *tel que, si* $T = k_{12}(L\ ;\ \mathbb{E}(|X_0|^i),\ 1 \leq i \leq 8q^2)$, *alors*

i) $\Gamma(F_T^L) \subset F_T^L$ *et la norme lipschitzienne de* Γ, *restreinte à* F_T^L, *est inférieure à* $1/2$,

ii) *il existe une unique solution forte au système (E) telle que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^{2q}) < \infty \qquad \textit{et} \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|Y_t|^{2q}) < \infty.$$

Preuve :

1) On choisit $L \geq 2aC(1 + \max(k_1(q)\widehat{X}_\infty^{2q,\rho}, k_2(q)\widehat{Y}_\infty^{2q,\rho}))$. D'après (1.19), on a

$$\|p_1 o\Gamma(\underline{b})\|_T \leq (1-a)C(1 + \widehat{X}_T^{2q,b}).$$

Ainsi, d'après le Lemme 1,

$$\|p_1 o\Gamma(\underline{b})\|_T \leq (1-a)C\left(1 + k_1(q)\widehat{X}_T^{2q,\rho} + k_1(q)T^{2q}\sum_{i=1}^{2q} c_i(\|b_1\|_T + \|\rho_0\|_\infty)^i(1 + \widehat{X}_T^{2qi,\rho})\right),$$

où $\|\rho\|_\infty = \sup_{x>0} |\beta_0 x|/(1 + |x|^{2q})$. On peut alors choisir T_1 assez petit tel que

$$(1-a)Ck_1(n)T_1^{2q}\sum_{i=1}^{2q} c_i(L + \|\rho_0\|_\infty)^i(1 + \widehat{X}_{T_1}^{2qi,\rho}) \leq L/2.$$

Ainsi $\Gamma b \in F_{T_1}^L$ car, pour $p_2 o\Gamma$, le calcul est identique.

2) Il s'agit maintenant d'examiner la constante de Lipschitz. En faisant la somme des inégalités (1.18), on obtient

$$\|\Gamma(\underline{b}) - \Gamma(\underline{c})\|_T^F \leq \alpha(T)\|\underline{b} - \underline{c}\|_T^F,$$

où $\alpha(T) = (k_4 + k_5)(e^{(1-a)KT} - 1) + (k_6 + k_7)Te^{(1-a)KT}$.

On choisit T_2 assez petit pour que $\alpha(T_2) \leq 1/2$. Alors, en prenant $T = \min(T_1, T_2)$, la norme Lipschitzienne est inférieure à $1/2$. T dépend évidemment de L et de $\mathbb{E}[|X_0|^i]$, pour $1 \leq i \leq 8q^2$.

3) On suppose que $T = k_{12}(L\ ;\ \mathbb{E}(|X_0|^i)\ 1 \leq i \leq 8q^2)$. Soit $b_0 \in F_T^L$. On construit alors la suite $\underline{b}_{n+1} = \Gamma\underline{b}_n$; d'après le début du lemme, on a $\underline{b}_n \in F_T^L$ pour tout n et Γ est une contraction de norme inférieure à $1/2$. D'après le théorème du point fixe, $\underline{b}_n$ converge vers $\underline{b}$ avec la norme $\|.\|_T^F$. La plupart des propriétés sont évidemment directement vérifiées par

$\underline{b}$: il ne reste plus qu'à montrer que b_1 et b_2 sont localement Lipschitziennes. On le vérifie pour b_1. Comme $\underline{b}_{n+1} = \Gamma \underline{b}_n$,

$$\begin{aligned} |b_{n+1,1}(t,x) - b_{n+1,1}(t,y)| &\leq (1-a)\mathbb{E}[|\beta(x - X_t^{b_n}) - \beta(y - X_t^{b_n})|] \\ &\leq (1-a)|x-y|\mathbb{E}[c + |x|^r + |y|^r + |X_t^{b_n}|^r] \\ &\leq k_{13}(N)(1 + \widehat{X}_T^{b_n,r})|x-y|, \text{ pour } |x| \leq N, \ |y| \leq N. \end{aligned}$$

Comme $\|p_1 o \underline{b}_n\|_T \leq K$ et $\|p_2 o \underline{b}_n\|_T \leq K$, on en déduit, d'après le Lemme 1,

$$|b_{n+1,1}(t,x) - b_{n+1,1}(t,y)| \leq k_{14}(N,K,T,\rho)|x-y|.$$

En prenant la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$|b_1(t,x) - b_1(t,y)| \leq k_{14}(N,K,T,\rho)|x-y|.$$

b_1 est donc localement lipschitzienne. On peut effectuer le même raisonnement pour b_2, ce qui implique que $\underline{b} \in F_T^L$: il s'agit donc d'un point fixe $\Gamma \underline{b} = \underline{b}$. Ainsi (X^b, Y^b) est une solution forte du système (E). **QED**
On aimerait construire une solution forte sur $[0, +\infty[$. Pour cela, on a besoin de savoir que $\sup_{t>0} \mathbb{E}(|X_t^b|^{2n}) < \infty$ et $\sup_{t>0} \mathbb{E}(|Y_t^b|^{2n}) < \infty$, pour un certain $n \geq 1$. Pour cela, on a besoin de majorations du type de celles développées dans le Lemme 1 mais qui ne dépendraient plus du temps T.
Tout d'abord, on rappelle un lemme énoncé dans [B-R-T-V] p.182.
Lemme 5 *Soit f une fonction continue et dérivable définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $l > 0$ tel que $\{t \ ; \ f(t) > l\} \subset \{t \ ; \ f'(t) < 0\}$ alors*

$$\sup_{x \geq 0} f(x) \leq \max(f(0), l).$$

Lemme 6 *Soit $\underline{b} \in F_T$ et on suppose que $\Gamma \underline{b} = \underline{b}$, avec $a = 1/2$, que $\beta_1 > K$ et que X_0 et Y_0 sont indépendantes et de même loi d'espérance nulle. Alors*

$$\widehat{X}_T^{b,2n} \leq k_{15}(m_i \ , \ 2 \leq i \leq 2n), \quad \text{où } m_i = \mathbb{E}(|X_0|^i), \tag{1.21}$$

$$\widehat{Y}_T^{b,2n} \leq k_{16}(n_i \ , \ 2 \leq i \leq 2n), \quad \text{où } n_i = \mathbb{E}(|Y_0|^i). \tag{1.22}$$

Preuve : Comme $a = 1/2$ et, X_0 et Y_0 sont indépendantes et de même loi, X_t et Y_t sont indépendants et de même loi. On en déduit

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[\beta(X_s - X'_s)]ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[\phi(X_s - X'_s)]ds,$$

où X et X' sont indépendants et de même loi. Puisque β et ϕ sont impaires, on a

$$\mathbb{E}[\beta(X_s - X'_s)] = \mathbb{E}[\phi(X_s - X'_s)] = 0,$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0.$$

Le même raisonnement est bien entendu valable pour Y.
i) Soit X_0 et X_0' deux variables aléatoires indépendantes et de même loi. Soient deux mouvements browniens indépendants B et B'. X, X' sont les solutions des équations

$$X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t b_1(s,X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t b_3(s,X_s)ds,$$

et

$$X_t' = X_0' + B_t' - \frac{1}{2}\int_0^t b_1(s,X_s')ds + \frac{1}{2}\int_0^t b_3(s,X_s')ds,$$

où

$$\begin{aligned} b_1(s,x) &= \mathbb{E}[\beta(x - X_s)] = \mathbb{E}[\beta(x - X_s')],\\ b_3(s,x) &= \mathbb{E}[\phi(x - X_s)] = \mathbb{E}[\phi(x - X_s')]. \end{aligned}$$

On pose $Y_t = X_t - X_t'$ et $\mu_n(t) = \mathbb{E}(|Y_t|^n)$ pour $n \geq 2$. Alors Y est une semi-martingale :

$$Y_t = Y_0 + B_t - B_t' - \frac{1}{2}\int_0^t (b_1(s,X_s) - b_1(s,X_s'))\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t b_3(s,X_s) - b_3(s,X_s')ds.$$

En appliquant la formule d'Itô, on trouve

$$\begin{aligned} Y_t^{2n} &= Y_0^{2n} + 2n\int_0^t Y_s^{2n-1}d(B-B')_s - n\int_0^t Y_s^{2n-1}(b_1(s,X_s) - b_1(s,X_s'))ds\\ &\quad + n\int_0^t Y_s^{2n-1}(b_3(s,X_s) - b_3(s,X_s'))ds + 2n(2n-1)\int_0^t Y_s^{2n-2}ds. \end{aligned}$$

On prend alors l'espérance :

$$\begin{aligned} \mu_{2n}(t) &= \mu_{2n}(0) + n\int_0^t \mathbb{E}[Y_s^{2n-1}(b_3(s,X_s) - b_3(s,X_s'))]ds + 2n(2n-1)\int_0^t \mu_{2n-2}(s)ds\\ &\quad - n\int_0^t \mathbb{E}[Y_s^{2n-1}(b_1(s,X_s) - b_1(s,X_s'))]ds. \end{aligned}$$

On dérive par rapport au temps pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{2n}'(t)}{n} &= 2(2n-1)\mu_{2n-2}(t) + \mathbb{E}[Y_t^{2n-1}(b_3(t,X_t) - b_3(t,X_t'))]\\ &\quad - \mathbb{E}[Y_t^{2n-1}(b_1(t,X_t) - b_1(t,X_t'))]. \end{aligned}$$

On suppose que $x \geq y$. Comme b_1 satisfait à (1.6) et b_3 est lipschitzienne de coefficient $K > 0$, on a

$$(x-y)(b_1(t,x) - b_1(t,y)) \geq \beta_1(x-y)^2 - |\beta_0||x-y|,$$

et

$$|b_3(t,x) - b_3(t,y)| \leq K(x-y).$$

On en déduit donc

$$\frac{\mu_{2n}'(t)}{n} \leq 2(2n-1)(\mu_{2n}(t))^{1-1/n} + |\beta_0|(\mu_{2n}(t))^{1-1/2n} - \beta_1\mu_{2n}(t) + K\mu_{2n}(t).$$

Comme dans l'hypothèse du lemme $K < \beta_1$, il existe $k_{17} > 0$ tel que, pour $x \geq k_{17}(n)$, on a

$$2(2n-1)x^{1-1/n} + |\beta_0|x^{1-1/2n} - \beta_1 x + Kx < 0\ ;$$

alors $\{t\ ;\ \mu_{2n}(t) > k_{17}(n)\} \subset \{t\ ;\ \mu'_{2n}(t) < 0\}$. En appliquant le Lemme 5, on obtient

$$\mathbb{E}[(X_t - X'_t)^{2n}] \leq \max(k_{17}(n),\mathbb{E}[(X_0 - X'_0)^{2n}]), \quad n \geq 1.$$

ii) Soient ξ et ξ' deux variables indépendantes, ξ' étant une copie de ξ, telles que $\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}[\xi'] = 0$. Alors

$$\mathbb{E}[\xi^{2n}] \leq k_{18}(\mathbb{E}((\xi - \xi')^2),\ldots,\mathbb{E}((\xi - \xi')^{2n})).$$

La démonstration de ce résultat se fait par récurrence. Ceci termine la preuve du Lemme 6, puisque $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t] = 0$. **QED**

Lemme 7 *Soit $\underline{b} \in F_T$. On suppose que $\Gamma\underline{b} = \underline{b}$; X_0 et Y_0 ont des lois symétriques et $\beta_1 > \frac{1-a}{a}K$. Alors*

$$\widehat{X}_T^{b,2n} \leq k_{19}(m_i\ ;\ 2 \leq i \leq 2n), \tag{1.23}$$

$$\widehat{Y}_T^{b,2n} \leq k_{20}(n_i\ ;\ 2 \leq i \leq 2n). \tag{1.24}$$

Preuve :
i) On suppose que X_0 et Y_0 ont des lois symétriques.
On montre alors que $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t] = 0$. Pour ce faire, on considère $(X_t,\ Y_t)$, la solution de

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \displaystyle\int_0^t b_1(s,X_s)ds + \int_0^t b_3(s,X_s)ds \\ Y_t = Y_0 + \tilde{B}_t - \displaystyle\int_0^t b_2(s,X_s)ds + \int_0^t b_4(s,X_s)ds, \end{cases}$$

avec

$$b_3(t,x) = \mathbb{E}[a\phi(x - Y_t)], \quad b_1(t,x) = \mathbb{E}[(1-a)\beta(x - X_t)],$$
$$b_4(t,x) = \mathbb{E}[(1-a)\phi(x - X_t)], \quad b_2(t,x) = \mathbb{E}[a\beta(x - Y_t)].$$

On remarque alors que si $(X_t,B_t),(Y_t,\tilde{B}_t)$ est solution faible de ces équations, alors, comme ϕ et β sont impaires, $(-X_t,-B_t),(-Y_t,-\tilde{B}_t)$ sont également solutions faibles des équations. Grâce à l'unicité en loi, $-X_t$ a même loi que X_t et $-Y_t$ a même loi que Y_t puisque $-X_0$ a même loi que X_0 et $-Y_0$ a même loi que Y_0. On en déduit alors

$$\mathbb{E}[-X_t] = \mathbb{E}[X_t] = 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$\mathbb{E}[-Y_t] = \mathbb{E}[Y_t] = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

ii) Pour la suite, on va utiliser les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du Lemme 6, mais dans la situation présente, a peut être différent de 1/2. On considère donc X_t et X'_t deux solutions de

$$X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t b_1(s,X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t b_3(s,X_s)ds,$$

et

$$X'_t = X'_0 + B'_t - \frac{1}{2}\int_0^t b_1(s,X'_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t b_3(s,X'_s)ds.$$

On pose $Z_t = X_t - X'_t$ et $\mu_n(t) = \mathbb{E}(|Z_t|^n)$, pour $n \geq 2$. Z est une semi-martingale :

$$Z_t = Z_0 + B_t - B'_t - \int_0^t (b_1(s,X_s) - b_1(s,X'_s))\,ds + \int_0^t b_3(s,X_s) - b_3(s,X'_s)ds.$$

En appliquant la formule d'Itô, puis en dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\mu'_{2n}(t)}{n} &= (2n-1)\mu_{2n-2}(t) + 2\mathbb{E}[Z_t^{2n-1}(b_3(t,X_t) - b_3(t,X'_t))] \\ &\quad -2\mathbb{E}[Z_t^{2n-1}(b_1(t,X_t) - b_1(t,X'_t))].\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve précédente, on obtient

$$\frac{\mu'_{2n}(t)}{n} \leq (2n-1)(\mu_{2n}(t))^{1-1/n} + 2a|\beta_0|(\mu_{2n}(t))^{1-1/2n} + 2((1-a)K - a\beta_1)\mu_{2n}(t).$$

Comme dans l'hypothèse du lemme $\beta_1 > \frac{1-a}{a}K$, il existe $k_{21}(n) > 0$ tel que, pour $x \geq k_{21}(n)$, on a

$$(2n-1)x^{1-1/n} + 2a|\beta_0|x^{1-1/2n} + 2((1-a)K - a\beta_1)x < 0.$$

Ainsi $\{t\ ;\ \mu_{2n}(t) > k_{21}(n)\} \subset \{t\ ;\ \mu'_{2n}(t) < 0\}$. En appliquant le Lemme 5, on obtient

$$\mathbb{E}[(X_t - X'_t)^{2n}] \leq \max(k_{21}(n),\mathbb{E}[(X_0 - X'_0)^{2n}]), \quad n \geq 1.$$

La fin de la démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme précédent.**QED**

preuve du Théorème 1

On suppose X_0, Y_0 de lois symétriques. On note

$$\begin{aligned}U \ = \max\ &\{T > 0, \text{ le système (E) admet une unique solution sur } [0,T], \\ &\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[X_t^{2q}] < \infty \text{ et } \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[Y_t^{2q}] < \infty\}\end{aligned}$$

(par convention $\max\emptyset = 0$).

1) On montre d'abord que $U > 0$. On choisit

$$\begin{aligned}K \ = \max\{\ &2aC(1 + \max(k_1(q)\widehat{X}_\infty^{2q,\rho},k_2(q)\widehat{Y}_\infty^{2q,\rho}))\ ; \\ &k_3(1 + k_{19}(m_i\ ;\ 2 \leq i \leq 2q) + k_{20}(n_i\ ;\ 2 \leq i \leq 2q))\}\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 4, il existe $T = k_{12}(m_i\ ;\ 1 \leq i \leq 8q^2)$ et un unique $\underline{b} \in \Lambda_T^K$, tel que $\Gamma\underline{b} = \underline{b}$ alors (X^b,Y^b) est l'unique solution forte du système (E') sur $[0,T]$. On suppose qu'il existe $(\tilde{X}^b,\tilde{Y}^b)$ solution de (E') sur $[0,T]$, telle que $\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\tilde{Y}_t^{2q}] < \infty$ et $\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\tilde{X}_t^{2q}] < \infty$. On note

$$\begin{aligned}c_1(t,x) &= \mathbb{E}[(1-a)\beta(x - \tilde{X}_t^b)] \\ c_2(t,x) &= \mathbb{E}[a\beta(x - \tilde{Y}_t^b)] \\ c_3(t,x) &= \mathbb{E}[a\phi(x - \tilde{Y}_t^b)] \\ c_4(t,x) &= \mathbb{E}[(1-a)\phi(x - \tilde{X}_t^b)].\end{aligned}$$

Ainsi
$$\|c_1(t,x)\|_T \leq k_3(1+\tilde{X}_t^{c,2q}).$$
Comme $\underline{c} = \Gamma\underline{c}$, d'après le Lemme 7, on a
$$\|c_1(t,x)\|_T \leq k_3(1+k_{19}(m_i\ ;\ 2\leq i\leq 2q)) \leq K.$$
De la même manière, on obtient $\|c_2(t,x)\|_T \leq K$, d'où $\underline{c}\in\Lambda_T^K$ et alors, par unicité, $\tilde{X}=X$, $\tilde{Y}=Y$ et $\underline{b}=\underline{c}$.

2) On remarque tout d'abord que $\widehat{X}_\infty^{2q,\rho} = k_{22}(m_i\ ;\ 2\leq i\leq 2q)$. De la même façon, on remarque que $\widehat{Y}_\infty^{2q,\rho} = k_{23}(m_i\ ;\ 2\leq\ i\leq\ 2q)$. On pose $m_i' = k_{19}(m_j\ ;\ 2\leq\ j\leq i)$ et $n_i' = k_{20}(n_j\ ;\ 2\leq\ j\leq i)$. Soit K' la constante définie par l'équation (24) en remplaçant les m_i et n_i par les m_i' et n_i'. A ce K' correspond un $T' = k_{12}(m_i'\,;2\leq i\leq 8q^2) > 0$. On raisonne alors par l'absurde : on suppose que $U<\infty$ et on choisit $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon < T'/2$. Or on sait que, pour $\varepsilon>0$, il existe T tel que $U-\varepsilon<T<U$ et qu'il existe une solution (X,Y) sur $[0,T]$ vérifiant $\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[Y_t^{2q}]<\infty$ et $\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[X_t^{2q}]<\infty$. On considère alors le système (E') sur $[T,\infty[$ en prenant comme données initiales X_T et Y_T qui sont symétriques (on a dejà démontré dans le Lemme 7 que X_t a même loi que $-X_t$ et idem pour Y). Or d'après le Lemme 7
$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[X_t^{2q}] \leq k_{19}(m_i\ ;\ 2\leq i\leq 2q) \leq m_{2q}',$$
$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[Y_t^{2q}] \leq k_{20}(n_i\ ;\ 2\leq i\leq 2q) \leq n_{2q}'.$$
On peut donc définir une solution sur $[T,T+T']$. Comme $T+T'>U$ il y a contradiction ce qui entraîne que $U=\infty$. **QED**

En utilisant la démonstration de ce théorème, on peut énoncer directement un autre résultat :

Proposition 2 *Soit (X,Y) une solution du système (E). On suppose que $\mathbb{E}(X_0^{2n})<\infty$ et $\mathbb{E}(Y_0^{2n})<\infty$ alors*
$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[X_t^{2n}]<\infty \quad \textit{et} \quad \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[Y_t^{2n}]<\infty\ , \quad \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

Remarque 1 *Pour $a = 1/2$, grâce à l'unicité de la solution du système, le système (E) n'est plus un système à proprement parler mais une juxtaposition de deux équations identiques : on rejoint alors l'étude développée dans [B-R-T-V].*

1.2 Existence d'une distribution stationnaire

Dans tout ce paragraphe, on notera $u(t,x)$ la densité de X_t et $v(t,x)$ celle de Y_t. On rappelle que (X_t,Y_t) est l'unique solution forte du système (E) et on peut alors directement en déduire que $(u(t,x),v(t,x))$ est solution du système suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\frac{\partial}{\partial x}[(\phi * v)u] + (1-a)\frac{\partial}{\partial x}[(\beta * u)u] \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-a)\frac{\partial}{\partial x}[(\phi * u)v] + a\frac{\partial}{\partial x}[(\beta * v)v]. \end{array}\right. \tag{1.25}$$

Si $u(x)dx$ et $v(x)dx$ sont des distributions stationnaires, elles vérifient alors:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\frac{\partial}{\partial x}[(\phi * v)u] + (1-a)\frac{\partial}{\partial x}[(\beta * u)u] = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-a)\frac{\partial}{\partial x}[(\phi * u)v] + a\frac{\partial}{\partial x}[(\beta * v)v] = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

En intégrant ces équations, on obtient

$$u(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{ a\int_0^x \phi * v(y)dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy \right\}, \tag{1.27}$$

où $\lambda(u,v)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$.

$$v(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\left\{ (1-a)\int_0^x \phi * u(y)dy - a\int_0^x \beta * v(y)dy \right\}, \tag{1.28}$$

où $\mu(u,v)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} v(x)dx = 1$. Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant, qui donne l'existence d'une distribution stationnaire; on énoncera par la suite un résultat d'unicité.

Théorème 2 *1) Il existe un couple de densités (u,v) tel que u et v sont des fonctions paires, de plus, (u,v) satisfait aux équations (1.26), (1.27) et (1.28).*
2) Si u et v sont les densités de X_0 et Y_0, alors la solution (X_t,Y_t) du système (E) a pour densité jointe $u(x)v(y)$ quelque soit $t \geq 0$.

Pour prouver ce résultat, on a besoin du Théorème du point fixe de Schauder (voir, par exemple, Corollaire 11.2 p.280 dans [G.T]). On note $\overline{F}$ l'adhérence d'un ensemble F.

Proposition 3 *On suppose que $\mathcal{E}$ est un espace de Banach, $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe fermé, $\mathcal{A}$ une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ telle que*
(i) $\mathcal{A}$ est continue
(ii) $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$ est compact
alors $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $\mathcal{C}$.

On détermine tout d'abord les ensembles concernés et, pour cela, on introduit quelques notations.

Notations :

1) $\mathcal{E}_0$ est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_x (1+|x|^p)|f(x)| < \infty \quad \text{où } p > 4q.$$

On munit $\mathcal{E}_0$ de la norme $|.|_\infty$ où $|f|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^p)|f(x)|$.

2) On définit $\mathcal{C}_M$ le sous-ensemble fermé convexe de $\mathcal{E}_0$ suivant:

$$\mathcal{C}_M = \left\{ f \in \mathcal{E}_0 \ ; \ f \geq 0 \ ; \ \text{paire} \ ; \ \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \ ; \ \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^p)f(x) \leq M \right\}.$$

3) Pour tout $u \in \mathcal{C}_M$, on définit $\gamma_k(u) = \int_{\mathbb{R}} |x|^k u(x)dx$ et pour $(u,v) \in \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M$, les opérateurs suivants

$$\mathcal{A}(u,v)(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{ a\int_0^x \phi * v(y)dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy \right\}$$

$$\mathcal{B}(u,v)(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp \left\{ (1-a) \int_0^x \phi * u(y)dy - a \int_0^x \beta * v(y)dy \right\}$$

Pour pouvoir appliquer la Proposition 3, il est nécessaire de démontrer quelques lemmes préliminaires.

Lemme 8 *Soit $u \in \mathcal{C}_M$.*

1) Si $C_1 = 1 + \max\limits_{0 \leq k \leq p-2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1+|x|^p} dx$, alors

$$\gamma_k(u) \leq MC_1, \quad 0 \leq k \leq p-2. \tag{1.29}$$

2) $\beta * u$ est une fonction impaire et

$$\int_0^x \beta(y)dy \leq \int_0^x (\beta * u)(y)dy \leq C_2 M x^2 (1+x^{2q}), \quad \forall x \geq 0 \tag{1.30}$$

où C_2 est une constante dépendant de β et M et satisfaisant $M \geq \max(1, C_1^{2q})$.

Preuve : On rappelle la preuve de ce Lemme qui se trouve dans [B-R-T-V].
On montre tout d'abord la première partie du lemme : il est facile de voir que

$$\gamma_k(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1+|x|^p} (1+|x|^p) u(x) dx \leq MC_1, \quad 0 \leq k \leq p-2.$$

Il est également évident que $\beta * u$ est une fonction impaire. De plus, pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \beta * u(x) &= \beta(x) + \int_{\mathbb{R}} (\beta(x-y) - \beta(x)) u(y) dy \\ &= \beta(x) + \int_0^\infty (\beta(x-y) + \beta(x+y) - 2\beta(x)) u(y) dy. \end{aligned}$$

β étant une fonction impaire, on obtient

$$\beta * u(x) = \beta(x) + \int_0^\infty (\beta(x+y) - \beta(y-x) - 2\beta(x)) u(y) dy.$$

En utilisant la convexité de β sur $\mathbb{R}_+$ et le fait que toute fonction impaire f convexe sur $\mathbb{R}_+$ vérifie

$$f(x) \leq \frac{1}{2}(f(x-y) + f(x+y)), \, \forall x \geq 0, \, \forall y \in \mathbb{R},$$

on a

$$\beta * u(x) \geq \beta(x), \, \forall x \geq 0.$$

On en déduit donc la minoration dans l'équation (1.30). Pour la majoration, on décompose $\beta * u$ de la façon suivante :

$$\beta * u(x) = \int_0^\infty (\beta(x+y) - \beta(y)) u(y) dy + \int_0^\infty (\beta(y) - \beta(y-x)) u(y) dy.$$

En utilisant l'inégalité (1.2), on obtient

$$|\beta * u(x)| \leq cx(1+x^r) \left(1 + \int_0^\infty y^r u(y) dy \right), \, x \geq 0.$$

Comme $r+1 \leq 2q$ et $2q \leq p-2$, on a, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\gamma_r(u) &= \int_{\mathbb{R}} |y|^r u(y)dy \leq (\gamma_{2q}(u))^{r/2q} \leq (MC_1)^{r/2q} \\ &\leq (MC_1)^{(2q-1)/2q} \leq M^{(1-1/4q^2)} \leq M.\end{aligned}$$

Par intégration, on obtient la majoration de (1.30). **QED**

Grâce à ce lemme, on peut montrer le résultat suivant :

Lemme 9 *Il existe M tel que*

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M) \subset \mathcal{C}_M \quad \textit{et} \quad \mathcal{B}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M) \subset \mathcal{C}_M$$

Preuve : Il suffit de vérifier ce lemme pour $\mathcal{A}$, l'autre inclusion se montre de manière identique à quelques constantes près.

On pose $R(x) = (1+|x|^p)\mathcal{A}(u,v)(x)$, u et v appartenant à $\mathcal{C}_M$. Evidemment $\mathcal{A}(u,v) \geq 0$. Par ailleurs, puisque ϕ est bornée par M_ϕ, (voir Préliminaires)

$$\mathcal{A}(u,v)(x) \leq \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy + aM_\phi x\right\}.$$

En utilisant le lemme précédent, on a

$$\mathcal{A}(u,v)(x) \leq \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)dy\right\}.$$

On en déduit, grâce à (1.1),

$$0 \leq R(x) \leq \frac{1}{\lambda(u,v)} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[(1+|x|^p)\exp\left\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)dy\right\}\right] \leq \frac{C_3}{\lambda(u,v)},$$

où C_3 est une constante ne dépendant que de ϕ, β et a.

On cherche maintenant à minorer $\lambda(u,v)$:

$$\begin{aligned}\lambda(u,v) &= 2\int_0^\infty \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy + a\int_0^x \phi * v(y)dy\right\}dx \\ &\geq 2\int_0^\infty \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy - aM_\phi x\right\}dx.\end{aligned}$$

En appliquant (1.30), on obtient

$$\lambda(u,v) \geq 2\int_0^\infty \exp\left\{-(1-a)C_2Mx^2(1+x^{2q}) - aM_\phi x\right\}dx \geq \frac{C_4}{\sqrt{M}},$$

où $C_4 = \int_0^\infty \exp(-(1-a)C_2y^2(1+y^{2q}) - aM_\phi y)dy$. C_4 ne dépend donc que de a, q, β et ϕ. Cette dernière inégalité est obtenue par le changement de variable $y = x\sqrt{M}$ en supposant que $M \geq 1$. Finalement, on obtient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} R(x) \leq \frac{C_3}{C_4}\sqrt{M}.$$

On peut alors choisir M tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^p)\mathcal{A}(u,v)(x)\leq M \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^p)\mathcal{B}(u,v)(x)\leq M.$$

QED

Lemme 10 *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs continus.*
Preuve : On étudie la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \exp\left\{a\int_0^x \phi * v_1(y)dy-(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)dy\right\} \\
&\quad -\exp\left\{a\int_0^x \phi * v_2(y)dy-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)dy\right\} \\
&= \left(\exp -(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)dy\right)\left[\exp a\int_0^x \phi * v_1(y)dy - \exp a\int_0^x \phi * v_2(y)dy\right] \\
&\quad +\left(\exp a\int_0^x \phi * v_2(y)dy\right) \\
&\quad \times\left[\exp -(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)dy - \exp -(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)dy\right] \\
&= \theta_1(x)+\theta_2(x).
\end{aligned}$$

$$|\theta_1(x)|\leq\left(\exp -(1-a)\int_0^x \beta(y)dy\right)\left|\exp a\int_0^x \phi * v_1(y)dy - \exp a\int_0^x \phi * v_2(y)dy\right|.$$

Or $\int_0^x \phi * v_1(y)dy \leq M_\phi x$, d'où

$$\begin{aligned}
|\theta_1(x)| &\leq a\exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)dy + aM_\phi x\right\}\left|\int_0^x \phi * v_1(y)dy - \int_0^x \phi * v_2(y)dy\right| \\
&\leq a\exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)dy + aM_\phi x\right\}\left|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} \phi(y-t)(v_1-v_2)(t)dtdy\right|.
\end{aligned}$$

Comme

$$\left|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} \phi(y-t)(v_1-v_2)(t)dtdy\right|\leq M_\phi x|v_1-v_2|_\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{1+|t|^p},$$

et, de plus, comme $\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\exp\{-(1-a)\int_0^x\beta(y)dy+aM_\phi x\}|<\infty$ car $\beta(x)\geq\beta_1 x+\beta_0$ pour $x\geq 0$ avec $\beta_1>0$, on a

$$|\theta_1(x)|\leq C_6|v_1-v_2|_\infty.$$

On calcule maintenant $|\theta_2(x)|$:

$$\begin{aligned}
|\theta_2(x)| &\leq \exp(aM_\phi x)\left|\exp\left(-(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)dy\right) - \exp\left(-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)dy\right)\right| \\
&\leq \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)dy + aM_\phi x\right\} \\
&\quad \times\left|\exp\left(-(1-a)\phi_1(x)\right) - \exp\left(-(1-a)\phi_2(x)\right)\right|,
\end{aligned}$$

où $\phi_i(x) = \int_0^x \tilde{\beta}_i(y)dy$ avec $\tilde{\beta}_i(y) = \int_0^\infty (\beta(y+t) - \beta(t-y) - 2\beta(y))u_i(t)dt$.
Comme $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a-b|$ pour a et b positifs et comme β vérifie $\beta(x) \leq \beta(x-y) + \beta(x+y)$, on obtient

$$|\theta_2(x)| \leq (1-a)\exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)dy + aM_\phi x\right\}\int_0^x H(y)dy,$$

où

$$\begin{aligned} H(y) &= \left|\int_0^\infty (\beta(y+t) - \beta(t-y) - 2\beta(y))(u_1(t) - u_2(t))dt\right| \\ &= \left|\int_0^\infty (\beta(y+t) - \beta(t-y))(u_1(t) - u_2(t))dt\right|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} H(y) &\leq \int_0^\infty |\beta(y+t) - \beta(t-y)||u_1(t) - u_2|(t)dt \\ &\leq \int_0^\infty Cy(1+y^r)(1+t^r)|u_1(t) - u_2|(t)dt. \end{aligned}$$

De plus, comme $p > 4q$,

$$H(y) \leq Cy(1+y^r)|u_1 - u_2|_\infty^{1/2}.$$

En intégrant, on obtient

$$|\theta_2(x)| \leq Cx^2(1+x^r)|u_1 - u_2|_\infty^{1/2}\exp\left\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)dy\right\}.$$

On en déduit

$$|\theta_2(x)|_\infty \leq C_7|u_1 - u_2|_\infty^{1/2}. \tag{1.31}$$

Il ne reste plus qu'à estimer $\mathcal{A}(u_1,v_1)(x) - \mathcal{A}(u_2,v_2)(x)$. En décomposant cette différence, on obtient

$$\mathcal{A}(u_1,v_1)(x) - \mathcal{A}(u_2,v_2)(x) = \frac{1}{\lambda(u_1,v_1)}\theta(x) + (\lambda(u_1,v_1) - \lambda(u_2,v_2))W(x),$$

où

$$W(x) = \frac{1}{\lambda(u_1,v_1)\lambda(u_2,v_2)}\exp\left\{a\int_0^x \phi * v_2(y)dy - (1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)dy\right\}. \tag{1.32}$$

Or, d'après la démonstration du Lemme 9, $|W(x)| \leq M \times c^{te}$ où c^{te} est une constante et $W(x) \geq 0$.
De plus, comme $\lambda(u_1,v_1) - \lambda(u_2,v_2) = \int_0^\infty \theta(x)dx$, on obtient

$$|\mathcal{A}(u_1,v_1) - \mathcal{A}(u_2,v_2)|_\infty \leq C_8(|u_1 - u_2|_\infty + |v_1 - v_2|_\infty) + C_9(|u_1 - u_2|_\infty^{1/2} + |v_1 - v_2|_\infty^{1/2}).$$

On en déduit donc que $\mathcal{A}$ est un opérateur continu. Le même raisonnement est valable pour $\mathcal{B}$. **QED**

Preuve du Théorème 2 :
1) Pour pouvoir utiliser la Proposition 3 (avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_0$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M$), grâce aux lemmes précédents, il ne reste plus qu'à vérifier que $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M) \times \mathcal{B}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M)}$ est bien compact.
On observe tout d'abord que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(u,v)(x) &= \frac{1}{\lambda(u,v)}(a\phi * v(x) - (1-a)\beta * u(x)) \\ &\quad \times \exp\left\{a\int_0^x \phi * v(y)dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy\right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}'(u,v)(x)| &\leq \frac{\sqrt{M}}{C_4}(|(1-a)\beta * u(x)| + aM_\phi)\exp\left\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)dy\right\} \\ &\leq \frac{\sqrt{M}}{C_4}\left(C(1-a)x(1+x^r)\left(1+\int_0^\infty y^r u(y)dy\right) + aM_\phi\right) \\ &\quad \times \exp\left\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)dy\right\} \\ &\leq C_{10}(1+|x|^{2q+1})\exp\left\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)dy\right\}.\end{aligned}$$

Comme $\beta(y) \geq \beta_1 y + \beta_0$, on obtient que $|\mathcal{A}'(u,v)(x)|$ est uniformément borné par rapport à u, v et x. Idem pour $\mathcal{B}$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli : soit (u_n,v_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M$. Il existe alors une sous-suite qui converge vers (u,v). Or par la dernière inégalité démontrée et par son homologue pour $\mathcal{B}$, on en déduit que $(u,v) \in \mathcal{E}$. Ainsi $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M) \times \mathcal{B}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M)}$ est compact.
2) D'après 1), il existe $u \in \mathcal{C}_M$ et $v \in \mathcal{C}_M$ tels que $u = \mathcal{A}(u,v)$ et $v = \mathcal{B}(u,v)$. Alors, de manière évidente, u et v sont dans $\mathcal{C}^1$.
Si on suppose que $\mathbb{P}(X_0 \in dx) = u(x)dx$ et $\mathbb{P}(Y_0 \in dx) = v(x)dx$, on a alors $\mathbb{P}(X_t \in dx) = u(x)dx$ et $\mathbb{P}(Y_t \in dx) = v(x)dx$. **QED**

On cherche maintenant à étudier à quelles conditions suffisantes, on obtient un résultat d'unicité du couple (u,v).

Pour cela, on suppose que $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe. Comme $\beta(0) = 0$, $x \to \frac{\beta(x)}{x}$ est une fonction croissante et positive. De plus, par l'hypothèse (1.1), on sait que $\frac{\beta(x)}{x} \geq \beta_1 > 0$, au voisinage de l'origine, ce qui implique que $\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{\beta(x)}{x}$ existe et appartient à $]\beta_1, +\infty[$.
On pose alors

$$\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x, \text{ où } \beta_0 \text{ est convexe, avec } \lim_{x\to 0^+}\frac{\beta_0(x)}{x} = 0. \tag{1.33}$$

Théorème 3 *On suppose que β admette la décomposition (1.33), il existe alors $\alpha_{\beta_0} > 0$ tel que, pour tout $\alpha \geq \alpha_{\beta_0}$, le système (1.26) admet au plus un couple de solutions.*

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin de quelques lemmes et de la définition suivante :

$$\mathcal{D} = \left\{ \nu \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \ ; \ \text{paire} \ ; \ \int_{\mathbb{R}} \nu(x)dx = 1 \ \text{ et } \ \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^{2n})\nu(x) < \infty \right\}$$

Lemme 11 *On suppose que (1.33) soit vérifié et que $u \in \mathcal{D}$ alors*

$$\beta_0 * u(x) = \int_0^\infty (\beta_0(x+y) - \beta_0(y-x))u(y)dy \geq 0, \ \ \forall x \geq 0, \tag{1.34}$$

$$\beta * u(x) = \beta_0 * u(x) \geq \alpha x, \ \ \forall x \geq 0. \tag{1.35}$$

La démonstration de ce lemme est évidente (c'est pour cela que l'on ne l'expose pas ici). Soit (u,v) le couple solution de (1.26) alors

$$u(x) = \mathcal{A}(u,v) \leq \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{ aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy \right\}.$$

Ainsi

$$u(x) \leq \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{ aM_\phi x - \frac{(1-a)}{2}\alpha x^2 \right\}. \tag{1.36}$$

Par des arguments identiques,

$$v(x) \leq \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\left\{ (1-a)M_\phi x - \frac{a}{2}\alpha x^2 \right\}. \tag{1.37}$$

On définit alors l'espace suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha \ = \ & \Big\{ (u,v) \ , \ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \ , \ v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \ ; \ \int_{\mathbb{R}} u(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)dx = 1, \\ & u(x) = u(-x) \ \text{ et } v(x) = v(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \, u \text{ vérifiant } (1.36) \ ; \ v \text{ vérifiant } (1.37) \}. \end{aligned}$$

On définit également la norme

$$N_p(u) = \int_0^\infty x(1+x^p)|u(x)|dx, \ \ p > 4q.$$

On montre alors que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des contractions de $\mathcal{D}_\alpha$ dans $\mathcal{D}$ pour la norme N_p.

Lemme 12 *Il existe une constante c ne dépendant que de β_0, ϕ et a telle que, si $(u,v) \in \mathcal{D}_\alpha$ alors*

$$\frac{1}{\lambda(u,v)} \leq \alpha c.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \lambda(u,v) \ &= \ \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ a\int_0^x \phi * v(y)dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy \right\} dx \\ &\geq \ 2\int_0^\infty \exp\left\{ -aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta_0 * u(y)dy - (1-a)\alpha\frac{x^2}{2} \right\} dx. \end{aligned}$$

Or, grâce à (1.2),

$$\beta_0 * u(y) \leq cy(1+y^r)\left(1+\int_0^\infty t^r u(t)dt\right).$$

Par le calcul, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^r u(t)dt &\leq \int_0^\infty \frac{t^r}{\lambda(u,v)} \exp\left\{-(1-a)\frac{\alpha t^2}{2}+aM_\phi t\right\}dt\\ &\leq \frac{1}{\alpha^{r/2}}\int_0^\infty \frac{(\alpha t^2)^{r/2}}{\lambda(u,v)} \exp\left\{-(1-a)\frac{\alpha t^2}{2}+aM_\phi t\right\}dt.\end{aligned}$$

En posant $x=\sqrt{\alpha}t$, et puisque $\alpha \geq 1$, on a

$$\int_0^\infty t^r u(t)dt \leq \frac{1}{\alpha^{(r+1)/2}}\int_0^\infty \frac{x^r}{\lambda(u,v)} \exp\left\{-(1-a)\frac{x^2}{2}+aM_\phi x\right\}dx.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty t^r u(t)dt \leq \frac{C_{11}}{\lambda(u,v)}.$$

On cherche donc à minorer $\lambda(u,v)$:

$$\lambda(u,v) \geq 2\int_0^\infty \exp\left\{-aM_\phi x-(1-a)\alpha\frac{x^2}{2}-C_{12}(1-a)x^2(1+x^r)\left(1+\frac{1}{\lambda(u,v)}\right)\right\}dx.$$

En posant $\mu=\sqrt{\lambda(u,v)}$ et $x=\mu y$, on obtient

$$\mu^2 \geq 2\mu\int_0^\infty \exp\left\{-aM_\phi \mu y-(1-a)\alpha\frac{(y\mu)^2}{2}-C_{12}(1-a)y^2(1+(y\mu)^r)(1+\mu^2)\right\}dy.$$

D'où $\mu \geq h(\mu)$, où

$$h(t)=2\int_0^\infty \exp\left\{-aM_\phi ty-(1-a)\alpha\frac{(yt)^2}{2}-C_{12}(1-a)y^2(1+(yt)^r)(1+t^2)\right\}dy.$$

Il se trouve que h est décroissante, on calcule alors sa dérivée en supposant que $t\in[0,1]$:

$$-h'(t) \leq C_{13}+2\alpha(1-a)t\int_0^\infty y^2\exp\left\{-y^2(C_{14}+\frac{\alpha t^2}{2})\right\}dy.$$

En posant $x=y\sqrt{C_{14}+\frac{\alpha t^2}{2}}$, on a, par un changement de variable,

$$-h'(t) \leq C_{13}+\frac{2\alpha(1-a)t}{(C_{14}+\frac{\alpha t^2}{2})^{3/2}}\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx \leq C_{13}+C_{15}\alpha\rho_\alpha(t),$$

en définissant $\rho_\alpha(t)=t/(C_{14}+\frac{\alpha t^2}{2})$. Comme $\sqrt{\alpha}\rho_\alpha(t) \leq \sqrt{\alpha}\rho_\alpha(C_{14}\sqrt{2/\alpha})$ et comme $\sqrt{\alpha}\rho_\alpha\left(C_{14}\sqrt{2/\alpha}\right)$ est une constante qui ne dépent pas de α, on a

$$h(0)-h(t) \leq t(C_{13}+C_{16}\sqrt{\alpha}).$$

Comme $h(0)$ est une constante, il existe C_{17} tel que $h(t) \geq C_{17}(1 - t(1+\sqrt{\alpha}))$.
Si $t < \inf(1, C_{17}(C_{17}(1+\sqrt{\alpha})+1)^{-1})$ alors $h(t) > t$ et donc, si α est assez grand, $\mu = \sqrt{\lambda(u,v)} \geq C_{17}(C_{17}(1+\sqrt{\alpha})+1)^{-1}$. Ainsi $1/\alpha\lambda(u,v)$ est majoré par une constante.
QED

Lemme 13 *Soit $\theta(x)$ la fonction paire définie par*

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)dy + a\int_0^x \phi * v_1(y)dy\right\} \\ &\quad - \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)dy + a\int_0^x \phi * v_2(y)dy\right\},\end{aligned}$$

où (u_1,v_1) et (u_2,v_2) sont des éléments de $\mathcal{D}_\alpha$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\theta(x)| \leq cx^2(1+x^r)\exp\left(aM_\phi x - (1-a)\frac{\alpha x^2}{2}\right)(N_p(u_1-u_2) + N_p(v_1-v_2)). \tag{1.38}$$

Preuve :

$$\theta(x) = \left(\exp -(1-a)\frac{\alpha x^2}{2}\right)\theta_0(x).$$

On définit θ_0 comme θ en remplacant β par β_0. On obtient la décomposition suivante $\theta_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x)$ avec les inégalités suivantes, pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}|\theta_1(x)| &\leq \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta_0(y)dy\right\}\left|\exp a\int_0^x \phi * v_1(y)dy - \exp a\int_0^x \phi * v_2(y)dy\right| \\ &\leq a\exp(aM_\phi x)\left|\int_0^x \phi * v_1(y)dy - \int_0^x \phi * v_2(y)dy\right| \\ &\leq a\exp(aM_\phi x)\left|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} \phi(y-t)(v_1-v_2)(t)dtdy\right| \\ &\leq a\exp(aM_\phi x)\left|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} (\phi(y-t)-\phi(y))(v_1-v_2)(t)dtdy\right| \\ &\leq a\exp(aM_\phi x)\left|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} (\phi(y+t)-\phi(t-y))(v_1-v_2)(t)dtdy\right|.\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue grâce à la parité de ϕ. De plus, comme ϕ est lipschitzienne, il existe $C_{18} > 0$ tel que

$$|\theta_1(x)| \leq C_{18}x^2\exp(aM_\phi x)N_p(v_1-v_2).$$

On observe maintenant θ_2 :

$$\begin{aligned}|\theta_2(x)| &\leq \exp(aM_\phi x)\left|\exp\left(-(1-a)\int_0^x \beta_0 * u_1(y)dy\right) - \exp\left(-(1-a)\int_0^x \beta_0 * u_2(y)dy\right)\right| \\ &\leq \exp(aM_\phi x)\left|\exp\left(-(1-a)\int_0^x\int_0^\infty (\beta_0(t+y)-\beta_0(t-y))u_1(t)dtdy\right)\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \exp\left(-(1-a)\int_0^x\int_0^\infty (\beta_0(t+y)-\beta_0(t-y))u_2(t)dtdy\right)\Bigg| \\
\leq\ & (1-a)\exp(aM_\phi x)\left|\int_0^x\int_0^\infty (\beta_0(t+y)-\beta_0(t-y))(u_1-u_2)(t)dtdy\right| \\
\leq\ & (1-a)\exp(aM_\phi x)\int_0^x cy(1+y^r)dy\int_0^\infty t(1+t^r)|u_1-u_2|(t)dt.
\end{aligned}
$$

Or, comme $\frac{1+t^r}{1+t^p}$ est borné, car $p > 4q \geq 2r+2$, il s'ensuit que

$$|\theta_2(x)| \leq C_{17}x^2(1+x^r)\exp(aM_\phi x)N_p(u_1-u_2).$$

On obtient donc le résultat recherché en combinant $|\theta_1|$ et $|\theta_2|$. **QED**

Lemme 14 *Il existe $\alpha_{\beta_0} > 0$ et $0 < k_{\beta_0} < 1$ tels que, pour tout $\alpha \geq \alpha_{\beta_0}$ on a*

$$N_p(\mathcal{A}(u_1,v_1)-\mathcal{A}(u_2,v_2)) \leq k_{\beta_0}(N_p(u_1-u_2)+N_p(v_1-v_2)),$$

pour tout (u_1,v_1) et (u_2,v_2) dans $\mathcal{D}_\alpha$ et $N_p(w) = \int_{\mathbb{R}} |x|(1+|x|^p)|w(x)|dx$.

Preuve : Pour la preuve de ce résultat, on notera toujours c la constante même si elle peut changer de valeur d'une ligne à la suivante. Tout d'abord on rappelle la décomposition utilisée dans le Lemme 10 :

$$\mathcal{A}(u_1,v_1)(x)-\mathcal{A}(u_2,v_2)(x) = \frac{1}{\lambda(u_1,v_1)}\theta(x)+(\lambda(u_1,v_1)-\lambda(u_2,v_2))W(x),$$

où

$$W(x) = \frac{1}{\lambda(u_1,v_1)\lambda(u_2,v_2)}\exp\left\{a\int_0^x \phi * v_2(y)dy-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)dy\right\}.$$

Alors, d'après les lemmes précédents, on a

$$\frac{1}{\lambda(u_1,v_1)}N_p(\theta) \leq c\alpha I_1(N_p(u_1-u_2)+N_p(v_1-v_2)),$$

où

$$I_1 = \int_0^\infty x^3\exp\left(aM_\phi x-(1-a)\frac{\alpha x^2}{2}\right)(1+x^p)(1+x^r)dx.$$

En posant $y = \sqrt{\alpha}x$, on obtient

$$I_1 \leq \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty y^3(1+y^p)(1+y^r)\exp\left(aM_\phi y-(1-a)\frac{y^2}{2}\right)dy.$$

D'où

$$\frac{1}{\lambda(u_1,v_1)}N_p(\theta) \leq \frac{c}{\alpha}(N_p(u_1-u_2)+N_p(v_1-v_2)).$$

Par ailleurs,

$$|\lambda(u_1,v_1)-\lambda(u_2,v_2)| = \left|\int_0^\infty \theta(x)dx\right| \leq \int_0^\infty |\theta(x)|dx \leq \frac{c}{\alpha^{3/2}}(N_p(u_1-u_2)+N_p(v_1-v_2)),$$

et comme $N_p(W(x)) \leq c\alpha$, où W est défini ci-dessus, on obtient le résultat énoncé dans le lemme. Les mêmes calculs se font bien entendu pour $\mathcal{B}$. **QED**
Pour démontrer le Théorème 3, il suffit de remarquer que le lemme précédent peut être interprêté comme suit : pour α assez grand, $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est une contraction de $\mathcal{D}_\alpha$ dans $\mathcal{D}$, ce qui entraîne l'unicité du point fixe.

1.3 Convergence vers la distribution stationnaire

On a vu jusqu'à présent qu'il existait une unique solution forte au système (E) (section 1.1) et qu'il existait une solution au système (1.26), c'est-à-dire qu'il existe une distribution stationnaire (section 1.2). De plus, si on suppose que (1.33) est vérifié, il y a unicité de la distribution stationnaire. On se placera dans ce cas pour toute cette section afin de montrer que, sous certaines conditions, la loi de (X_t,Y_t), solution du système (E), converge vers la distribution stationnaire.
On commence par énoncer quelques résultats qui seront primordiaux pour montrer la convergence vers la distribution stationnaire. On rappellera leurs preuves qui se trouvent dans [B-R-V].

1.3.1 Résultats préliminaires

On commence par rappeler un lemme de comparaison concernant des E.D.S. Soit $\mathcal{L}_{lip}^{loc}$ l'ensemble des fonctions $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : pour tout $N > 0$, $T > 0$, il existe une constante $K_{T,N}$ telle que

$$|b(s,x) - b(s,y)| \leq K_{T,N}|x-y|, \forall |x| \leq N, \forall |y| \leq N, \forall s \leq T.$$

Si $b \in \mathcal{L}_{lip}^{loc}$, on peut définir une unique solution X^b, jusqu'au temps d'explosion e_b, de l'E.D.S. suivante :

$$X_t^b = X_0 + B_t - \int_0^t b(s,X_s^b)ds, \ \ t < e_b,$$

où B est un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien unidimensionnel partant de l'origine, et X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable. Pour la suite, on suppose que b vérifie

$$\operatorname{sgn}(x)b(s,x) \geq 0 \ \forall s \geq 0, \ \forall x \neq 0. \tag{1.39}$$

D'après la Proposition 3.3 dans [B-R-T-V], on sait alors que l'E.D.S. ci-dessus admet une unique solution forte définie sur $\mathbb{R}_+$ (i.e. $e_b = \infty$).
Proposition 4 *Soient b et c deux fonctions impaires de $\mathcal{L}_{lip}^{loc}$ vérifiant (1.39) et*

$$\operatorname{sgn}(x)(b(s,x) - c(s,x)) \geq 0, \ \ \forall s \geq 0, \forall x \ \text{(resp. } \leq). \tag{1.40}$$

Alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\mathbb{E}[f(X_t^b)] \leq \mathbb{E}[f(X_t^c)] \ \ \forall t \geq 0 \ \text{(resp. } \geq),$$

sachant $X_0^b = X_0^c = X_0$.

Pour démontrer ce résultat, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 15 *Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{L}_{lip}^{loc}$, $b \in \mathcal{L}_{lip}^{loc}$ et b_n converge vers b :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{|x|\leq R,\, s\leq T}|b_n(s,x)-b(s,x)|\right)=0,$$

pour tout $T \geq 0$, $R > 0$. Alors $X_t^{b_n}$ converge presque sûrement vers X_t^b quand $n \to \infty$, lorsque $X_0^{b_n} = X_0^b = X_0$.

La preuve de ce lemme est évidente.

Preuve de la Proposition 4 :

i) Dans un premier temps, on montre qu'on peut se ramener à des fonctions b et c lipschitziennes. Pour cela, on se donne une suite de fonctions impaires φ_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, φ_n croissante sur $\mathbb{R}_+$, définie par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ x, & 2/n \leq x \leq n, \\ n+1, & x \geq n+1. \end{cases}$$

On définit également

$$b_n(t,x) = \varphi_n(b(t,\varphi_n(x))),\;\; c_n(t,x) = \varphi_n(c(t,\varphi_n(x))),\;\; t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}.$$

Comme φ_n est une fonction croissante, b_n et c_n vérifient (1.40). En utilisant le Lemme 15, on peut alors, par approximation, supposer que b et c sont des fonctions impaires lipschitziennes uniformément en t et que

$$b(t,x) = c(t,x) = 0,\;\; |x| \leq \alpha, \tag{1.41}$$

pour un $\alpha > 0$.

ii) On définit un nouveau mouvement brownien β :

$$\beta_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s^b)dB_s,\;\; t \geq 0.$$

Comme $x \to xb(t,x)$ est une fonction paire, $U := (X^b)^2$ est solution de l'E.D.S. suivante :

$$U_t = X_0^2 + 2\int_0^t \sqrt{U_s}d\beta_s - \int_0^t \tilde{b}(s,U_s)ds,$$

où

$$\tilde{b}(s,x) = \sqrt{|x|}b(s,\sqrt{|x|}) - \frac{1}{2}s,\;\; s \geq 0,\, x \in \mathbb{R}.$$

Grâce à la propriété (1.41), la dérive de l'E.D.S. est lipschitzienne en x uniformément par rapport à s. Ainsi l'E.D.S. admet une unique solution forte (voir, par exemple, Proposition 2.13 p. 291 dans [K-S]). Par conséquent, $((X_t^b)^2;\ t \geq 0)$ et $(U'_t;\ t \geq 0)$ ont la même loi, où U' est solution de

$$U'_t = X_0^2 + 2\int_0^t \sqrt{U'_s}dB_s - \int_0^t \tilde{b}(s,U'_s)ds.$$

De la même façon, $((X_t^c)^2;\ t \geq 0)$ et $(V_t';\ t \geq 0)$ ont la même loi, où V' est solution de

$$V_t' = X_0^2 + 2\int_0^t \sqrt{V_s'}dB_s - \int_0^t \tilde{c}(s,V_s')ds.$$

Ici, $\tilde{c}$ est défini de la même manière que $\tilde{b}$ mais à partir de c, ce qui entraîne $\tilde{b}(t,x) \geq \tilde{c}(t,x)$. On peut maintenant terminer la preuve de cette proposition en appliquant un lemme de comparaison classique (voir, par exemple, Proposition 2.18 p.293 dans [K-S]). Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on a

$$U_t' \leq V_t' \quad (\text{resp. } \geq), \quad p.s.$$

Il s'en suit que si f est une fonction paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$\mathbb{E}[f(X_t^b)] = \mathbb{E}[g((X_t^b)^2)] = \mathbb{E}[g(U_t')] \leq \mathbb{E}[g(V_t')] = \mathbb{E}[g((X_t^c)^2)] = \mathbb{E}[f(X_t^c)],$$

où $f(x) = g(x^2)$. **QED**

L'étude du comportement asymptotique de processus de Markov dont le semi-groupe vérifie une propriété d'ultracontractivité est un second résultat primordial pour démontrer la convergence de la solution de l'E.D.S. vers la mesure stationnaire.
Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire telle que

$$b'(x) \geq k > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.42}$$

et

$$\exists \rho > 1, \quad \liminf_{+\infty} \frac{b(x)}{x^\rho} > 0. \tag{1.43}$$

A cette fonction b, on associe une densité de probabilité

$$\nu_b(x) = \frac{\exp - \int_0^x b(y)dy}{\int_{\mathbb{R}} \left(\exp - \int_0^x b(y)dy\right) dx}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.44}$$

On note L^b l'opérateur défini par

$$L^b f(x) = \frac{1}{2}(f''(x) - b(x)f'(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}).$$

On peut alors voir que

$$\langle L^b f,g\rangle_{\nu_b} = \langle f,L^b g\rangle_{\nu_b},$$

$$\langle L^b f,f\rangle_{\nu_b} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f'^2(x)\nu_b(x)dx,$$

f et g étant deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact et

$$\langle f,g\rangle_{\nu_b} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\nu_b(x)dx.$$

De plus, L^b est le générateur infinitésimal du semi-groupe markovien $(T_t^b;\ t \geq 0)$ sur $L^p(\nu_b)$ symétrique par rapport à $\nu_b(x)dx$. Voici quelques propriétés de ce semi-groupe :

Lemme 16 *Soit b : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire vérifiant (1.42) et (1.43), alors :*
i) $(T_t^b;\ t \geq 0)$ est un opérateur ultracontractif :

$$\|T_t^b f\|_\infty \leq k(t)\|f\|_{L^1(\nu_b)}, \tag{1.45}$$

où $k(t)$ est une constante positive.
ii) Pour tout $t \geq 0$, $T_t^b : L^2(\nu_b) \to L^2(\nu_b)$ est un opérateur à trace.
iii) Soit $(-\lambda_n;\ n \geq 1)$ la suite décroissante de valeurs propres négatives de L^b (i.e. $0 > -\lambda_1 > -\lambda_2 > ... > -\lambda_n > ...$) et f_n la fonction propre normalisée dans $L^2(\nu_b)$ associée à la valeur propre $-\lambda_n$, alors $\lambda_1 \geq k/2$ (propriété de trou spectral), k étant défini par (1.42), et

$$\|f_n\|_\infty \leq k(t)e^{\lambda_n t} \quad \forall t > 0. \tag{1.46}$$

Preuve :
i) Comme la primitive de b est une fonction concave et que son inverse est intégrable au voisinage de l'infini, on obtient l'ultracontractivité de T_t^b (voir Théorème 1.4 p.158 dans [K-K-R]).
ii) En utilisant des propriétés sur la densité de T_t^b, on montre qu'il s'agit d'un opérateur à trace. En effet, on a

$$T_t^b f(x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x,y) f(y)\nu_b(y)dy.$$

En prenant $(g_n)_{n\geq 0}$ une approximation de la masse de Dirac au point x_0 : δ_{x_0} et en passant à la limite dans l'inégalité d'ultracontractivité pour les fonctions g_n, on obtient $p_t(x,x_0) \leq\ k(t)$, ce qui signifie que la densité est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^2} p_t^2(x,y)\nu_b(x)\nu_b(y)dxdy < \infty.$$

Cette bornitude implique que, pour $t > 0$, $T_t^b : L^2(\nu_b) \to L^2(\nu_b)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (voir, par exemple [D-S] p.1009). Or, $T_t^b = T_{t/2}^b T_{t/2}^b$, ce qui implique que T_t^b est un opérateur à trace.
iii) Soit Γ l'opérateur "carré du champ" et Γ_2 défini par la relation suivante

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}(L^b(fg) - fL^b g - gL^b f),$$

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}(L^b(\Gamma(f,g)) - \Gamma(L^b f,g) - \Gamma(f,L^b g)).$$

S'il existe $k > 0$ tel que

$$\Gamma_2(f,f) \geq k\Gamma(f,f),$$

pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty$, alors on a la propriété de trou spectral i.e. iii) (voir [Ba-E] et [Ba]). Dans la situation présente

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}f'g', \ \ \Gamma_2(f,g) = \frac{1}{4}(f''g'' + b'f'g').$$

Ainsi, il suffit de montrer
$$f''^2 + b'f'^2 \geq 2kf'^2.$$
Or, ceci est une conséquence immédiate de (1.42)(en remplaçant k par $2k$), on obtient ainsi la propriété de trou spectral. Par ailleurs, prenant f_n une fonction propre normalisée dans $L^2(\nu_b)$, on obtient $\|f_n\|_{L^1(\nu_b)} \leq 1$ et ainsi l'inégalité d'ultracontractivité (1.45) implique (1.46). **QED**

Ce lemme a une application en probabilité puisqu'il permet d'estimer la différence entre la loi de X_t^b et la distribution stationnaire $\nu_b(x)dx$ lorsque le temps t tend vers l'infini.

Corollaire 1 *Soit* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction impaire localement lipschitzienne vérifiant: il existe* $\rho > 1$ *tel que* $\liminf_{+\infty} b(x)/x^\rho > 0$*, et*

$$b(x) - b(y) \geq k(x-y), \ \ \forall x \geq y, \ \ \text{où } k > 0.$$

Soit X_0 *une variable aléatoire admettant une densité par rapport à* ν_b*. Il existe alors* $\lambda > 0$ *et* $\gamma(t_0) > 0$ *tels que*

$$\left| \mathbb{E}[g(X_t^b)] - \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu_b(x)dx \right| \leq \gamma(t_0)e^{-\lambda t}\|g\|_{L^2(\nu_b)}, \tag{1.47}$$

pour tout $t \geq t_0$*,* $g \in L^2(\nu_b)$*.*

Preuve: On va montrer l'encadrement (1.47) pour une fonction $b \in \mathcal{C}^1$ et vérifiant $b'(x) \geq k > 0$. Le cas général s'obtient alors en approchant b.

Comme X_0 admet une densité, on a $\mathbb{P}(X_0 \in dx) = \theta(x)\nu_b(x)dx$. Alors, pour toute fonction $g \in L^2(\nu_b)$, on a le développement suivant

$$g = \langle g,1\rangle_{\nu_b} + \sum_{n\geq 1} \langle g,f_n\rangle f_n, \tag{1.48}$$

où $(f_n,\, n \geq 1)$ est la suite de fonctions propres associées aux $(\lambda_n,\, n \geq 1)$ (voir le lemme précédent). Ainsi

$$\mathbb{E}[g(X_t^b)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[g(X_t^x)]\theta(x)\nu_b(x)dx = \langle \mathbb{E}[g(X_t^\cdot)],\theta\rangle_{\nu_b},$$

où $(X_t^x,\, t \geq 0)$ est la diffusion de l'E.D.S. avec dérive b et partant de x. En appliquant l'opérateur T_t^b à (1.48), on a

$$T_t^b g = \langle g,1\rangle_{\nu_b} + \sum_{n\geq 1} \langle g,f_n\rangle_{\nu_b} e^{-\lambda_n t} f_n.$$

On obtient ainsi

$$\Delta := \left| \mathbb{E}[g(X_t^b)] - \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu_b(dx) \right| \leq \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_n t} |\langle g,f_n\rangle_{\nu_b}| |\langle f_n,\theta\rangle_{\nu_b}|.$$

Utilisant (1.46), on a

$$|\langle f_n,\theta\rangle_{\nu_b}| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\theta(x)\nu_b(x)dx \leq \|f_n\|_\infty \leq k(t_0/2)e^{\lambda_n t_0/2}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $L^2(\mathbb{N})$, on a

$$\Delta \leq k(t_0/2)c(t)\left(\sum_{n\geq 1}(\langle g,f_n\rangle_{\nu_b})^2\right)^{1/2} = k(t_0/2)c(t)\|g\|_{L^2(\nu_b)},$$

$$c(t)^2 \leq e^{-\lambda(t-t_0)}\left(\sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_n t_0/2}\right).$$

Or, comme $T^b_{t_0/2}$ est un opérateur à trace (voir Lemme 16), $\sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_n t_0/2} < +\infty$. Ceci termine la preuve de (1.47) puisque les estimations ci-dessus ne dépendent pas de la distribution initiale. **QED**

1.3.2 Convergence vers la distribution stationnaire

Voici quelques rappels et préliminaires qui sont essentiellement des conséquences de (1.33) :

$$\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x,\ \alpha > 0,$$

où β_0 est une fonction impaire, strictement croissante, convexe sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant : il existe $r > 0$, tel que

$$|\beta_0(x) - \beta_0(y)| \leq c|x-y|(1+|x|^r+|y|^r),\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.49}$$

En particulier

$$|\beta_0(x)| \leq C(1+|x|^{2q}),\ \text{où}\ 2q \geq r+1. \tag{1.50}$$

On supposera de plus que $K < \frac{1-a}{a}\alpha$. Dans la section 1.2 on a vu qu'il existe $\alpha_{\beta_0} > 0$ tel que, pour tout $\alpha \geq \alpha_{\beta_0}$, il existe une unique distribution symétrique stationnaire $(u(x)dx,v(x)dx)$ telle que

$$u(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)}\exp\left\{a\int_0^x \phi * v(y)dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy\right\}, \tag{1.51}$$

où $\lambda(u,v)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$.

$$v(x) = \frac{1}{\mu(u,v)}\exp\left\{(1-a)\int_0^x \phi * u(y)dy - a\int_0^x \beta * v(y)dy\right\}, \tag{1.52}$$

où $\mu(u,v)$ est tel que $\int_{\mathbb{R}} v(x)dx = 1$. La démonstration de ce résultat repose sur le fait que, pour tout α supérieur ou égal à un certain α_{β_0}, il existe $0 < k_{\beta_0} < 1$ tel que

$$N_p(\mathcal{A}(u_1,v_1) - \mathcal{A}(u_2,v_2)) \leq k_{\beta_0}(N_p(u_1-u_2) + N_p(v_1-v_2)).$$

$\mathcal{A}$ est défini ici par

$$\mathcal{A}(u,v)(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)}\exp\left\{a\int_0^x \phi * v(y)dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)dy\right\},$$

et

$$N_p(w) = \int_{\mathbb{R}} |x|(1+|x|^p)|w(x)|dx, \quad p > 4q.$$

L'inégalité ci-dessus est vérifiée pour tout (u_1,v_1) et (u_2,v_2) appartenant à $\mathcal{D}_\alpha$ défini par l'équation (1.38). Le résultat est également vérifié pour $\mathcal{B}$ défini comme suit

$$\mathcal{B}(u,v)(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\left\{(1-a)\int_0^x \phi * u(y)dy - a\int_0^x \beta * v(y)dy\right\}.$$

Remarque 2 *On peut rendre k_{β_0} suffisamment petit en augmentant α_{β_0}.*

Voici le résultat principal de ce paragraphe :

Proposition 5 *On suppose que X_0 et Y_0 sont deux variables aléatoires de lois symétriques, $\beta_0(x) \geq kx^\rho$ pour $x \geq 1$ et pour un certain $\rho > 1$ et ϕ est concave sur $\mathbb{R}_+$. Alors il existe l tel que, pour tout $\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$ avec $\alpha \geq l$, la distribution du couple (X_t,Y_t), solution de (E), converge vers $(u(x)dx,v(x)dx)$ quand t tend vers l'infini.*

Avant de commencer la démonstration de cette proposition, voici quelques remarques sur les fonctions avec lesquelles on sera amené à travailler. On pose

$$r_1(t,x) = \mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t) - a\phi(x-Y_t)],$$

$$r_2(t,x) = \mathbb{E}[a\beta(x-Y_t) - (1-a)\phi(x-X_t)].$$

On note au passage que le système (E) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} X_t + B_t - \int_0^t r_1(s,X_s)ds \\ Y_t + \tilde{B}_t - \int_0^t r_2(s,Y_s)ds. \end{cases}$$

Comme X_t et Y_t sont de lois symétriques (voir la démonstration du Lemme 7), on obtient

$$\mathbb{E}[\beta(x-X_t)] = \mathbb{E}[\beta(x+X_t)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\beta(x-X_t)+\beta(x+X_t)] = \mathbb{E}[\widetilde{\beta}_x(X_t)],$$

où $\widetilde{\beta}_x(y) = \frac{1}{2}(\beta(x-y)+\beta(x+y))$. β étant convexe et impaire, on en déduit que $\widetilde{\beta}_x(y) \geq \beta(x)$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}[\beta(x-X_t)] \geq \beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x \geq \alpha x. \tag{1.53}$$

De plus, par (1.2),

$$\mathbb{E}[\beta(x-X_t) - \beta(y-X_t)] \leq c|x-y|(1+|x|^r+|y|^r).$$

$\mathbb{E}[\beta(x-X_t)]$ est donc borné pour x fixé. En ce qui concerne le deuxième terme de r_1, on raisonne de manière identique et on trouve alors

$$\mathbb{E}[\phi(x-Y_t)] = \mathbb{E}[\widetilde{\phi}_x(Y_t)], \text{ où } \widetilde{\phi}_x(y) = \frac{1}{2}(\phi(x-y)+\phi(x+y)).$$

Comme ϕ est une fonction Lipschitzienne impaire,

$$\mathbb{E}[\phi(x-Y_t)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\phi(x+Y_t) - \phi(-x+Y_t)].$$

Ainsi $\mathbb{E}[\phi(x-Y_t)]$ est borné à x fixé :

$$-Kx \leq \mathbb{E}[\phi(x-Y_t)] \leq Kx, \tag{1.54}$$

et

$$\mathbb{E}[|\phi(x-Y_t) - \phi(y-Y_t)|] \leq K|x-y|.$$

En reliant les propriétés de ϕ et de β, i.e (1.53) et (1.54), on déduit les inégalités suivantes concernant r_1 (on peut obtenir sensiblement les mêmes pour r_2).

$$r_1(t,x) \geq (1-a)\alpha x - Kax \geq \gamma x, \ \text{ où } \gamma > 0, \tag{1.55}$$

car on a supposé que $K < \frac{1-a}{a}\alpha$. Par ailleurs

$$|r_1(t,x) - r_1(y,t)| \leq c|x-y|(1+|x|^r+|y|^r).$$

On peut alors déterminer la limite supérieure et inférieure des coefficients r_i puisque ceux-ci sont bornés. On notera, pour $i = 1,2$,

$$\overline{r}^i_{t_0}(x) = \sup_{t\geq t_0} r_i(t,x), \ \ \underline{r}^i_{t_0}(x) = \inf_{t\geq t_0} r_i(t,x), \ \ x \geq 0.$$

Alors

$$\overline{r}^i_{t_0}(x) = -\overline{r}^i_{t_0}(-x) \quad \text{et} \ \ \underline{r}^i_{t_0}(x) = -\underline{r}^i_{t_0}(-x).$$

On pose également

$$\overline{r}^i(x) = \inf_{t_0} \overline{r}^i_{t_0}(x) = \limsup_t r_i(t,x),$$

$$\underline{r}^i(x) = \sup_{t_0} \underline{r}^i_{t_0}(x) = \liminf_t r_i(t,x).$$

Alors $\overline{r}^i(x) = -\overline{r}^i(-x)$ et $\underline{r}^i(x) = -\underline{r}^i(-x)$. De plus, si $x \geq y$,

$$\overline{r}^i_{t_0}(x) - \overline{r}^i_{t_0}(y) \geq \gamma(x-y), \quad \text{idem pour } \underline{r}^i_{t_0}, \tag{1.56}$$

$$\overline{r}^i(x) - \overline{r}^i(y) \geq \gamma(x-y), \quad \text{idem pour } \underline{r}^i.$$

On introduit enfin

$$\underline{u}(x) = \frac{\exp - \int_0^{|x|} \underline{r}^1(y)dy}{\int_{\mathbb{R}}(\exp - \int_0^{|x|} \underline{r}^1(y)dy)dx}.$$

$\overline{u}$ est défini de la même manière en remplacant $\underline{r}$ par $\overline{r}$; et $\overline{v}$ est défini en remplacant r_1 par r_2.

Lemme 17 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante paire à croissance polynômiale sur $\mathbb{R}_+$, alors il existe $\lambda > 0$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que*

$$-C_1 e^{-\lambda t_0} + \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\overline{r}^1_{t_0}}(y)dy \leq \mathbb{E}[f(X_t)] \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\underline{r}^1_{t_0}}(y)dy + C_2 e^{-\lambda t_0}, \tag{1.57}$$

pour $t \geq 2t_0$. On définit ν_c par la formule (1.44). La même relation est vraie pour Y_t, il suffit d'échanger r_1 et r_2.

Preuve : La preuve de ce résultat est similaire à celle de Benachour-Roynette-Vallois Lemme 3.2 p.214 dans [B-R-V].
On associe à X deux diffusions $\widetilde{X}$ et $\widehat{X}$ telles que

$$\widetilde{X}_t = X_{t_0} + B_t - B_{t_0} - \int_{t_0}^{t} \underline{r}^1_{t_0}(\widetilde{X}_s)ds, \;\; t \geq t_0,$$

$$\widehat{X}_t = X_{t_0} + B_t - B_{t_0} - \int_{t_0}^{t} \overline{r}^1_{t_0}(\widehat{X}_s)ds, \;\; t \geq t_0.$$

Comme les fonctions $\overline{r}^1$ et $\underline{r}^1$ sont paires localement lipschitziennes, on peut appliquer le principe de comparaison (Proposition 4), on obtient ainsi

$$\mathbb{E}[f(\widehat{X}_t)] \leq \mathbb{E}[f(X_t)] \leq \mathbb{E}[f(\widetilde{X}_t)], \;\; \text{pour} \;\; t \geq t_0,$$

pour f une fonction paire et croissante. Comme, d'après l'hypothèse de la Proposition 5 $\beta(x) \geq kx^\rho$ pour $x \geq 1$, et grâce à (1.46), on peut appliquer le Corollaire 1 qui utilise l'ultracontractivité du semi-groupe associé à la diffusion X^b, on en conclut qu'il existe des constantes c, c' et λ telles que, pour $t \geq 2t_0$,

$$c\overline{k}^1_f e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\overline{r}^i_{t_0}}(y)dy \leq \mathbb{E}[f(X_t)] \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\underline{r}^i_{t_0}}(y)dy + c'\underline{k}^1_f e^{-\lambda(t-t_0)},$$

où $\underline{\overline{k}}^1_f = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\underline{\overline{r}}^1_{t_0}}(y)dy$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\underline{\overline{k}}^1_f$ est fini. Pour cela, on prend c_1 et c_2 deux fonctions vérifiant : c_i est paire lipschitz, $\liminf_{x\to\infty} \frac{c_i(x)}{x^\rho} > 0$ pour un certain $\rho > 1$, $c_i(x) - c_i(y) \geq k(x-y)$ avec $k > 0$ et $x \geq y$ et de plus $\text{sgn}(x)(c_1(x) - c_2(x)) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On se donne $U_1(t)$ et $U_2(t)$ deux diffusions associées aux termes de drift c_1 et c_2 alors

$$\mathbb{E}[f(U_1(t))] \leq \mathbb{E}[f(U_2(t))].$$

En prenant la limite quand t tend vers l'infini, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{c_1}(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{c_2}(y)dy.$$

Grâce à (1.45), on déduit pour f à croissance polynômiale,

$$\overline{k}^1_f = \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\overline{r}^i_{t_0}}(y)dy \leq \underline{k}^1_f = \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\underline{r}^1_{t_0}}(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\gamma^\bullet}(y)dy < \infty,$$

(γ est défini dans l'équation (1.55)). **QED**

Preuve de la Proposition 5 :

1) On vérifie tout d'abord que $\underline{r}^1 = \overline{r}^1$ et que $\underline{r}^2 = \overline{r}^2$, en d'autres termes que $r_1(t,x)$ et $r_2(t,x)$ convergent quand t tend vers l'infini. On utilise le résultat du lemme précédent, avec $f = \widetilde{\beta}_x$. Comme $\mathbb{E}[\beta(x - X_t)] = \mathbb{E}[\widetilde{\beta}_x(X_t)]$, en prenant la limite supérieure et inférieure, on obtient

$$\begin{aligned}
\liminf_{t_0} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_x(y)\nu_{\overline{r}^1_{t_0}}(y)dy &\leq \liminf_{t} \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \\
&\leq \limsup_{t} \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \leq \limsup_{t_0} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_x(y)\nu_{\underline{r}^1_{t_0}}(y)dy.
\end{aligned}$$

Comme $\overline{r}^1(x) = \inf_{t_0} \overline{r}^1_{t_0}(x) \geq 0$, on a $\lim_{t_0 \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_x(y) \nu_{\overline{r}^1_{t_0}}(y) dy = \beta * \overline{u}(x)$, ainsi

$$\beta * \overline{u}(x) \leq \liminf_t \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \leq \limsup_t \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \leq \beta * \underline{u}(x).$$

On remarque que la même égalité est vraie pour Y_t en remplacant u par v.
ϕ étant concave sur $\mathbb{R}_+$, $-\widetilde{\phi}_x$ est une fonction croissante et donc par un raisonnement identique à celui que l'on vient d'effectuer

$$-\phi * \overline{v} \leq \liminf_t \mathbb{E}[-\phi(x - Y_t)] \leq \limsup_t \mathbb{E}[-\phi(x - Y_t)] \leq -\phi * \underline{v}.$$

En combinant les deux résultats, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{r}^1(x) &\leq (1-a)\beta * \underline{u}(x) - a\phi * \underline{v}(x), \\ \underline{r}^1(x) &\geq (1-a)\beta * \overline{u}(x) - a\phi * \overline{v}(x). \end{aligned} \tag{1.58}$$

En utilisant le Lemme 13 et le principe de comparaison décrit dans la preuve précédente, on sait qu'il existe $k_0 \in]0,1/2[$ tel que

$$N_p(\overline{u} - \underline{u}) \leq N_p(\mathcal{A}(\underline{u},\underline{v}) - \mathcal{A}(\overline{u},\overline{v})) \leq k_0(N_p(\overline{u} - \underline{u}) + N_p(\overline{v} - \underline{v})).$$

Par ailleurs, par un calcul similaire, il existe $k_1 \in]0,1/2[$, tel que

$$N_p(\overline{v} - \underline{v}) \leq N_p(\mathcal{B}(\underline{u},\underline{v}) - \mathcal{B}(\overline{u},\overline{v})) \leq k_1(N_p(\overline{u} - \underline{u}) + N_p(\overline{v} - \underline{v})).$$

On en déduit alors que $\underline{r}^i = \overline{r}^i = r_i^*$ et que $\underline{u} = \overline{u} = u^*$, $\underline{v} = \overline{v} = v^*$, en faisant la somme des deux inégalités précédentes. Puis par la formule (1.58), on trouve

$$r_1^*(x) = (1-a)\beta * u^*(x) - a\phi * v^*(x)$$

et

$$r_2^*(x) = a\beta * v^*(x) - (1-a)\phi * u^*(x).$$

Et donc (u^*,v^*) est l'unique solution du système (1.26) notée (u,v). Ceci implique, par convergence dominée, que

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx,$$

et

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[f(Y_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et à croissance exponentielle. Enfin, comme X_t et Y_t sont indépendants, la loi de (X_t,Y_t) converge vers $(u(x)dx,v(x)dx)$.
En particulier,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(|X_t| \geq a) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|y| \geq a\}} u(y)dy.$$

Comme la distribution de X_t est symétrique, on a

$$\mathbb{P}(|X_t| \geq a) = 2\mathbb{P}(X_t \geq a) = 2(1 - \mathbb{P}(X_t < a)).$$

On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(X_t < a) = \int_{-\infty}^{a} u(y)dy.$$

X_t converge donc bien en loi vers $u(x)dx$. Le même raisonnement est valable pour Y.**QED**

1.4 Différence entre les lois $u_t(x)dx$ et $v_t(x)dx$

En considérant le système (E), on remarque que, quand $a = 1/2$, les deux équations apparaissant dans le système sont identiques. Ainsi, X_t et Y_t ont la même loi, pour tout $t > 0$ (si X_0 et Y_0 ont la même loi). Par contre, lorsque $a \neq 1/2$, les lois de X_t et de Y_t sont vraiment différentes, pour $t > 0$. Dans un premier temps, on montrera que les densités des lois stationnaires (u et v) sont différentes en étudiant l'équivalent de $\ln \frac{u}{v}$ au voisinage de l'infini. Dans un second temps, on cherchera à quelle vitesse les lois de X_t et Y_t se séparent au voisinage de l'origine, lorsque X_0 et Y_0 ont la même loi.
On rappelle que $u(x)dx$ et $v(x)dx$ désignent les lois stationnaires du système (E), et donc que $(u(x),v(x))$ vérifie l'équation (1.26), où β et ϕ vérifient les hypothèses de la section préliminaire et (1.33) avec $\beta_0(x) \geq kx^\rho$ pour $x \geq 1$, où $k > 0$ et $\rho > 1$.
Proposition 6 *Au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, on a*

$$\ln \frac{u(x)}{v(x)} \sim (2a-1) \int_0^{|x|} \beta(y)dy. \tag{1.59}$$

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du résultat suivant :
Lemme 18 *Soit β une fonction croissante paire, à croissance polynômiale. Au voisinage de $\pm\infty$, on a alors*

$$\int_{\mathbb{R}} \beta(x-y)u(y)dy \sim \beta(x). \tag{1.60}$$

Idem pour $v(x)$.
Preuve du Lemme Pour montrer (1.60), on décompose le produit de convolution en trois intégrales.
i) La première est

$$I_1(R) = \int_{-R}^{R} \beta(x-y)u(y)dy, \quad \text{où} \quad R > 0.$$

Comme β est une fonction croissante, on a, pour $x \geq R$,

$$\beta(x-R) \int_{-R}^{R} u(y)dy \leq I_1(R) \leq \beta(x+R) \int_{-R}^{R} u(y)dy.$$

Puisque u est une densité de probabilité à décroissance exponentielle au voisinage de l'infini, quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir R_0 assez grand tel que, pour tout $R \geq R_0$,

$$\int_R^\infty \beta(y)u(y)dy \leq \varepsilon.$$

On en déduit alors que

$$\int_{-R}^{R} u(y)dy \geq 1 - 2\varepsilon, \quad \text{pour} \quad R \geq R_0.$$

Par ailleurs, on sait que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\beta(x \pm R)}{\beta(x)} = 1.$$

Ainsi on peut choisir x_0 assez grand tel que, pour tout $x \geq x_0$, on ait

$$(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon) \leq \frac{I_1(R)}{\beta(x)} \leq (1+\varepsilon)(1-2\varepsilon).$$

ii) La seconde intégrale est

$$I_2(R) = \int_R^{+\infty} \beta(x-y)u(y)dy.$$

Or, pour $R \geq R_0$, on a

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &\leq \int_R^{+\infty} |\beta(x-y)|u(y)dy \leq \int_R^{+\infty} \max(\beta(x),\beta(y))u(y)dy \\ &\leq \beta(x)\int_R^{+\infty} u(y)dy + \int_R^{+\infty} \beta(y)u(y)dy \leq (\beta(x)+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

iii) La troisième intégrale est

$$I_3(R) = \int_{-\infty}^{R} \beta(x-y)u(y)dy.$$

Or, pour $R \geq R_0$, on a

$$|I_3(R)| \leq \int_{-\infty}^{R} |\beta(x-y)|u(y)dy \leq \int_{R+x}^{+\infty} |\beta(y)|u(x+y)dy.$$

Comme u est décroissante au voisinage de l'infini, pour x assez grand, on a

$$|I_3(R)| \leq \int_{R+x}^{+\infty} |\beta(y)|u(y)dy \leq \varepsilon.$$

En combinant les trois intégrales ont obtient (1.60) au voisinage de $+\infty$ et, comme β est une fonction impaire, on en déduit (1.60) au voisinage de $-\infty$. **QED**

Preuve de la Proposition 6 : La preuve est évidente. On utilise le Lemme précédent pour obtenir des équivalents dans les formules (1.27) et (1.28). On utilise alors le fait que $\beta_0(x) \geq kx^\rho$ pour $x \geq 1$, avec $\rho > 0$, et que ϕ est une fonction bornée. **QED**

On s'intéresse maintenant à la séparation des lois de X_t et Y_t pour t au voisinage de l'origine. Pour cela, on introduit la distance de Wasserstein :

$$W(\mu,\nu) = \inf \int\int |x-y|d\pi(x,y),$$

où l'infimum est pris sur toutes les probabilités π sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ayant pour marginales μ et ν (de premier moment fini).

Proposition 7 *Soit $w(x)dx$ la loi de X_0 et celle de Y_0, avec w une fonction paire positive telle que $\int_{\mathbb{R}} x^{2(r+1)^2}w(x)dx < \infty$ (r étant défini dans la section préliminaire), et soient $u_t(x)dx$ la loi de X_t, $v_t(x)dx$ la loi de Y_t, alors*

$$\liminf_{t\to 0} \frac{W(u_t(x)dx, v_t(x)dx)}{t} \geq (2a-1)\int_{\mathbb{R}} |(\phi+\beta)*w|(x)w(x)dx.$$

Preuve : On définit tout d'abord la semi-norme suivante :

$$\|f\|_{Lip} = \inf\{\eta \geq 0 \ \text{ t.q. } \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ |f(x) - f(y)| \leq \eta |x-y|\}.$$

D'après le Théorème de Rubinstein-Kantorovitch (voir, par exemple, [Du] p.20), on sait que

$$W(\mu,\nu) = \sup \left[\int g d\mu - \int g d\nu \right],$$

où le suprémum est pris sur toutes les fonctions g telles que $\|g\|_{Lip} \leq 1$. Ainsi

$$W(u_t(x)dx, v_t(x)dx) = \sup_{g \,:\, \|g\|_{Lip} \leq 1} \mathbb{E}[g(X_t) - g(Y_t)], \tag{1.61}$$

où (X_t,Y_t) est la solution du système (E) (cette solution existe puisque $\mathbb{E}[X_0^{2(r+1)^2}] = \mathbb{E}[Y_0^{2(r+1)^2}] < \infty$: voir Théorème 1).
Or, d'après (1.4) et la formule d'Itô, pour g à dérivées première et seconde continues et bornées, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_t)] &= \mathbb{E}[g(X_0)] + a \int_0^t \mathbb{E}[g'(X_s)(\phi * v_s)(X_s)] ds \\ &\quad -(1-a) \int_0^t \mathbb{E}[g'(X_s)(\beta * u_s)(X_s)] ds + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}[g''(X_s)] ds. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(Y_t)] &= \mathbb{E}[g(Y_0)] + a \int_0^t \mathbb{E}[g'(Y_s)(\phi * u_s)(Y_s)] ds - (1-a) \int_0^t \mathbb{E}[g'(Y_s)(\beta * v_s)(Y_s)] ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}[g''(Y_s)] ds. \end{aligned}$$

On en déduit donc, par continuité en t,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[g(X_t) - g(Y_t)](0) = (2a-1) \int_{\mathbb{R}} g'(x)((\phi + \beta) * w)(x) w(x) dx.$$

On applique alors cette formule à une suite de fonctions $(g_n, \ n \geq 1)$ régulières paires à dérivées première et seconde bornées, croissantes sur $\mathbb{R}_+$, telles que $g_n'(x) = 1$ pour $x \geq 1/n$ et $\|g_n\|_{Lip} \leq 1$. Comme $a \geq 1/2$ et grâce à la parité de g_n, ϕ et β, on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[g_n(X_t) - g_n(Y_t)](0) \geq (2a-1) \int_{|x| \geq 1/n} |(\phi + \beta) * w|(x) w(x) dx.$$

En utilisant (1.61), on obtient

$$\liminf_{t \to 0} \frac{W(u_t(x)dx, v_t(x)dx)}{t} \geq (2a-1) \int_{|x| \geq 1/n} |(\phi + \beta) * w|(x) w(x) dx.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient le résultat de la Proposition 7. **QED**

Chapitre 2

Etude du système (F) et propagation du chaos

Dans ce chapitre, nous étudions le système à $N_n + M_n$ particules (F), chacune vérifiant une équation différentielle stochastique dans laquelle intervient la position des autres particules du système. L'ensemble des particules peut être divisé en deux sous-ensembles : les particules de même nature ont tendance à s'attirer et les particules de nature différente à se repousser. Dans un premier temps nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution au système (F), puis nous montrerons qu'il y a propagation du chaos : c'est-à-dire que si nous considérons un nombre fini de particules du système (F) et que le nombre de particules du système tend vers l'infini, les particules considérées seront asymptotiquement indépendantes et vérifieront une E.D.S. non linéaire. Enfin dans un dernier temps, nous étudierons une inégalité de concentration de la loi des particules autour de leur moyenne.

2.1 Existence et unicité des solutions pour (F)

Soient $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes tendant vers l'infini. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{N_n + M_n} = 1 - a, \ \ 1/2 \leq a < 1.$$

On définit le système de $N_n + M_n$ équations suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} X_t^{i,N_n} &= X_0^i + B_t^i - \frac{1}{N_n + M_n} \int_0^t \sum_{j=1}^{N_n} \beta(X_s^{i,N_n} - X_s^{j,N_n}) ds \\ &\quad + \frac{1}{N_n + M_n} \int_0^t \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^{i,N_n} - Y_s^{k,M_n}) ds, \ \ 1 \leq i \leq N_n \\ Y_t^{i,M_n} &= Y_0^i + \tilde{B}_t^i - \frac{1}{N_n + M_n} \int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} \beta(Y_s^{i,M_n} - Y_s^{j,M_n}) ds \\ &\quad + \frac{1}{N_n + M_n} \int_0^t \sum_{k=1}^{N_n} \phi(Y_s^{i,M_n} - X_s^{k,N_n}) ds, \ \ 1 \leq i \leq M_n \end{aligned} \right. \tag{2.1}$$

B et $\tilde{B}$ sont deux mouvement browniens indépendants de dimensions respectives N_n et M_n. Les hypothèses sur ϕ et β sont celles exprimées dans la section préliminaire du chapitre 1. On suppose de plus que $\beta_1 > \frac{1-a}{a}K$. **Dans toutes les démonstrations qui suivent, N_n n'apparaîtra pas en exposant à côté de X ni M_n à côté de Y dans le but d'alléger les notations.**

Proposition 8 *Le système (2.1) admet une unique solution forte.*

Preuve : Soit β_p la fonction définie par

$$\beta_p(x) = \begin{cases} \beta(p) & \text{si } x \geq p, \\ \beta(-p) & \text{si } x \leq -p, \\ \beta(x) & \text{si } -p \leq x \leq p. \end{cases}$$

On considère un nouveau système en remplacant β par β_p. Le terme de dérive est alors borné et lipschitzien, ainsi le système a une unique solution forte. Soit

$$T_p = \inf\{t \geq 0 : \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q.} \quad |X_t^n| > p \;\text{ ou } |Y_t^n| > p\}.$$

On veut montrer alors que $\sup T_p = \infty$. En utilisant la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^2 + \sum_{j=1}^{M_n}(Y_t^j)^2 &= \sum_{i=1}^{N_n}(X_0^i)^2 + \sum_{j=1}^{M_n}(Y_0^j)^2 + 2\int_0^t \sum_{i=1}^{N_n} X_s^i dB_s + 2\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} Y_s^j d\tilde{B}_s \\
&+ \frac{2}{N_n+M_n}\sum_{i=1}^{N_n}\int_0^t X_s^i\left(-\sum_{j=1}^{N_n}\beta(X_s^i - X_s^j) + \sum_{j=1}^{M_n}\phi(X_s^i - Y_s^j)\right)ds \\
&+ \frac{2}{N_n+M_n}\sum_{i=1}^{M_n}\int_0^t Y_s^i\left(-\sum_{j=1}^{M_n}\beta(Y_s^i - Y_s^j) + \sum_{j=1}^{N_n}\phi(Y_s^i - X_s^j)\right)ds \\
&+ (N_n+M_n)t \\
&= \sum_{i=1}^{N_n}(X_0^i)^2 + \sum_{j=1}^{M_n}(Y_0^j)^2 + 2\int_0^t \sum_{i=1}^{N_n} X_s^i dB_s + 2\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} Y_s^j d\tilde{B}_s \\
&+ \frac{2}{N_n+M_n}\sum_{1\leq i<j\leq N_n}\int_0^t -(X_s^i - X_s^j)\beta(X_s^i - X_s^j)ds \\
&+ \frac{2}{N_n+M_n}\sum_{1\leq i<j\leq M_n}\int_0^t -(Y_s^i - Y_s^j)\beta(Y_s^i - Y_s^j)ds \\
&+ \frac{2}{N_n+M_n}\sum_{1\leq i\leq N_n\;,\;1\leq j\leq M_n}\int_0^t (X_s^i - Y_s^j)\phi(X_s^i - Y_s^j)ds \\
&+ (N_n+M_n)t.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en utilisant la bornitude de ϕ, puis l'inégalité $\operatorname{sgn}(x)\beta(x) \geq 0$ impliquant

$$\sum_{1\leq i<j\leq N_n}(x^i - x^j)\beta(x^i - x^j) \geq 0,$$

on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}(X^i_{T_p})^2 \mathbb{1}_{\{T_p\leq t\}}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M_n}(Y^j_{T_p})^2 \mathbb{1}_{\{T_p\leq t\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}(X^i_{T_p\wedge t})^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M_n}(Y^j_{T_p\wedge t})^2\right]$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}(X^i_0)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M_n}(Y^j_0)^2\right] + \frac{2M_\phi}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^{T_p\wedge t}\left(\sum_{i=1}^{N_n}|X^i_s| + \sum_{i=1}^{M_n}|Y^i_s|\right)ds \\ &\quad +(N_n+M_n)\mathbb{E}[T_p\wedge t] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}(X^i_0)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M_n}(Y^j_0)^2\right] + (2M_\Phi p + N_n + M_n)t. \end{aligned}$$

Or, comme

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}(X^i_{T_p})^2 \mathbb{1}_{\{T_p\leq t\}}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M_n}(Y^j_{T_p})^2 \mathbb{1}_{\{T_p\leq t\}}\right] \geq p^2\mathbb{P}(T_p\leq t),$$

on obtient

$$\mathbb{P}(T_p\leq t) \leq \frac{1}{p^2}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}(X^i_0)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M_n}(Y^j_0)^2\right] + N_n + M_n\right\} + \frac{2M_\Phi t}{p^2}.$$

On en déduit donc que

$$\lim_{p\to\infty}\mathbb{P}(T_p\leq t) = 0.$$

QED

2.2 Propagation du chaos pour un système infini de particules

2.2.1 Convergence en loi

Le principal résultat concernant ce système d'équations est la propagation du chaos, c'est-à-dire que, pour tout $(k,r)\in\mathbb{N}^2$, $(X^{1,N_n}_t, X^{2,N_n}_t, \ldots, X^{k,N_n}_t, Y^{1,M_n}_t, \ldots, Y^{r,M_n}_t)$ converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers $\otimes_{i=1}^k\mu\otimes_{i=1}^r\nu$ où μ est la loi de X_t et ν la loi de Y_t, (X_t,Y_t) étant la solution du système (E). Ce résultat est la conséquence du théorème suivant (voir [S]) :

Théorème 4 *On suppose que X_0 et Y_0 ont des lois symétriques et que $\mathbb{E}[X_0^{2(r+1)^2}]<\infty$ et $\mathbb{E}[Y_0^{2(r+1)^2}]<\infty$, alors, pour tout $T<\infty$,*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X^{i,N_n}_t - \overline{X}^i_t|^2\right] = 0 \tag{2.2}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{i,M_n} - \overline{Y}_t^i|^2\right] = 0,$$

où $(\overline{X}_t^i,\overline{Y}_t^i)$ *est la solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{X}_t^i = X_0^i + B_t^i + a\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \phi(\overline{X}_s^i - x)v_s(x)dxds - (1-a)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \beta(\overline{X}_s^i - x)u_s(x)dxds \\ \overline{Y}_t^i = Y_0^i + \tilde{B}_t^i + (1-a)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \phi(\overline{Y}_s^i - x)u_s(x)dxds - a\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \beta(\overline{Y}_s^i - x)v_s(x)dxds \end{array}\right. \tag{2.3}$$

$u_t(x)dx$ *(respectivement* $v_t(x)dx$*) est la loi de* $\overline{X}_t^1$ *(resp.* $\overline{Y}_t^1$*).*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de plusieurs propositions et lemmes.

Proposition 9 *On suppose que* $\mathbb{E}[X_0^{2p}] < \infty$ *avec* $p \in \mathbb{N}$*, il existe alors une constante* c*, dépendant de* p *et* T*, telle que*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^{i,N_n})^2\right)^p\right] \le c(p,T)$$

Le même résultat est valable pour Y*.*

Preuve : Par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^{2p+2} \;=\;& \sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^{2p+2} + M_t + 2(p+1)\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{N_n}(X_s^i)^{2p+1}\left(\sum_{j=1}^{N_n}\frac{-1}{N_n+M_n}\beta(X_s^i - X_s^j)\right.\right. \\ & \left.\left. + \sum_{k=1}^{M_n}\frac{1}{N_n+M_n}\phi(X_s^i - Y_s^k)\right)\right) ds + (p+1)(2p+1)\int_0^t\sum_{i=1}^{N_n}(X_s^i)^{2p}ds,\end{aligned}$$

où M_t est une martingale locale continue. Or

$$\sum_{1\le i,j\le N_n}(x^i)^{2p+1}\beta(x^i - x^j) = \sum_{1\le i<j\le N_n}((x^i)^{2p+1} - (x^j)^{2p+1})\beta(x^i - x^j) \ge 0.$$

Par ailleurs, grâce à l'inégalité de Hölder et à la bornitude de ϕ, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^{2p+1}\phi(X_t^i - Y_t^k)\right|\right] \le M\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^{2p+2}\right]^{\frac{2p+1}{2p+2}}.$$

On pose $\psi_p(t) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^{2p}]$. Alors, d'après les dernières inégalités, on obtient que ψ vérifie

$$\psi_{p+1}(t) \le \psi_{p+1}(0) + M\psi_{p+1}^{(2p+1)/(2p+2)}(t) + (p+1)(2p+1)\int_0^t \psi_p(s)ds.$$

Comme $\psi_0(t) = N_n$, on obtient facilement, par récurence,

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^2\right)^p\right] \le c(p,T),$$

lorsque $\mathbb{E}[|X_0|^{2p}] < \infty$. **QED**

Proposition 10 *Soit $(\bar{X}_t^i,\bar{Y}_t^i)$ la solution du système (2.1). Alors, pour $T < \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \bar{X}_t^i)^2] = 0.$$

Preuve : D'après la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_t^i - \bar{X}_t^i)^2] = 2\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s,\bar{X}_s^i)\right)(X_s^i - \bar{X}_s^i)ds \\ -2\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{j=1}^{N_n}\beta(X_s^i - X_s^j) - ab_1(s,\bar{X}_s^i)\right)(X_s^i - \bar{X}_s^i)ds\end{aligned} \tag{2.4}$$

On définit

$$\begin{aligned} b_1(t,x) &= \mathbb{E}[\beta(x-\bar{X}_t^1)], \\ b_2(t,x) &= \mathbb{E}[\beta(x-\bar{Y}_t^1)], \\ b_3(t,x) &= \mathbb{E}[\phi(x-\bar{Y}_t^1)], \\ b_4(t,x) &= \mathbb{E}[\phi(x-\bar{X}_t^1)]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

i) On calcule d'abord le deuxième terme de l'égalité ci-dessus, lequel est égal à $(1)_i + (2)_i$ où

$$(1)_i = -\frac{2}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n}(\beta(X_s^i - X_s^j) - b_1(s,\bar{X}_s^i))(X_s^i - \bar{X}_s^i)ds,$$

$$(2)_i = -2\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n+M_n} - (1-a)\right) b_1(s,\bar{X}_s^i))(X_s^i - \bar{X}_s^i)ds.$$

On cherche d'abord à estimer $(1)_i$:

$$\begin{aligned}(1)_i &= -\frac{2}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n}(\beta(X_s^i - X_s^j) - \beta(\bar{X}_s^i - \bar{X}_s^j))(X_s^i - \bar{X}_s^i)ds \\ &\quad -\frac{2}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n}(\beta(\bar{X}_s^i - \bar{X}_s^j) - b_1(s,\bar{X}_s^i))(X_s^i - \bar{X}_s^i)ds \\ &= -\frac{2}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n}\rho_{i,j}^{(1)}(s)ds - \frac{2}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n}\rho_{i,j}^{(2)}(s)ds.\end{aligned}$$

La définition de $\rho^{(1)}_{i,j}(t)$ et celle de $\rho^{(2)}_{i,j}(t)$ sont implicites dans le calcul précédent. Or, on a la propriété suivante :

$$\sum_{1\le i,j\le N_n} \rho^{(1)}_{i,j}(t) = \sum_{1\le i<j\le N_n} \rho^{(3)}_{i,j}(t),$$

où $\rho^{(3)}_{i,j}(t) = \rho^{(1)}_{i,j}(t) + \rho^{(1)}_{j,i}(t)$. Comme β est impaire,

$$\rho^{(3)}_{i,j}(s) = (\beta(X^i_s - X^j_s) - \beta(\bar{X}^i_s - \bar{X}^j_s))(X^i_s - \bar{X}^i_s - (X^j_s - \bar{X}^j_s)).$$

Si $x-y \ge x'-y'$ (respectivement $x-y \le x'-y'$), alors $x-x' \ge y-y'$ (resp. $x-x' \le y-y'$) et donc $[(x-y)-(x'-y')][\beta(x-x') - \beta(y-y')] \ge 0$. Par conséquent $\rho^{(3)}_{i,j}(s) \ge 0$ et $\sum_{1\le i,j\le N_n} \rho^{(1)}_{i,j}(s) \ge 0$.
D'autre part, par l'inégalité de Schwartz :

$$-\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N_n} \rho^{(2)}_{i,j}(s)\right] \le \{\mathbb{E}[(X^i_s - \bar{X}^i_s)^2]\theta_i(s)\}^{1/2},$$

avec

$$\theta_i(s) = \mathbb{E}\left[\left\{\sum_{j=1}^{N_n}(\beta(\bar{X}^i_s - \bar{X}^j_s) - b_1(s,\bar{X}^i_s))\right\}^2\right].$$

En développant la somme dans θ, on obtient $\theta_i(s) = \sum_{j=1}^{N_n} \xi_{j,j}(s) + 2 \sum_{1\le j<k\le N_n} \xi_{j,k}(s)$ où

$$\xi_{j,k}(s) = \mathbb{E}\{(\beta(\bar{X}^i_s - \bar{X}^j_s) - b_1(s,\bar{X}^i_s))(\beta(\bar{X}^i_s - \bar{X}^k_s) - b_1(s,\bar{X}^i_s))\}.$$

- 1) si $j \ne k$, alors $\bar{X}^i_s$, $\bar{X}^j_s$ et $\bar{X}^k_s$ sont trois copies indépendantes de $\bar{X}^1_s$ et comme β est impaire, on obtient $\xi_{j,k}(s) = 0$ pour $j \ne k$

- 2) si $j = k$ alors $\xi_{jj} = \mathbb{E}[(\beta(\bar{X}^i_s - \bar{X}^j_s) - b_1(s,\bar{X}^i_s))^2]$. Comme $|\beta(x)| \le C(1 + |x|^{2q})$ pour $2q \ge r+1$, en utilisant la Proposition 2, on obtient une borne uniforme sur $[0,T]$: il existe une constante $C_1 > 0$ telle que
$$\theta_i(s) \le C_1^2 N_n.$$

Par ailleurs, en utilisant la symétrie $\mathbb{E}[(X^i_s - \bar{X}^i_s)^2] = \mathbb{E}[(X^1_s - \bar{X}^1_s)^2]$, on trouve alors une inégalité pour $(1)_i$:

$$\sum_{i=1}^{N_n}(1)_i \le \frac{C_1 N_n^{3/2}}{N_n + M_n} \int_0^t \mathbb{E}[(X^1_s - \bar{X}^1_s)^2]^{1/2} ds. \tag{2.6}$$

Que se passe-t'il pour $(2)_i$?

$$(2)_i \le 2\int_0^t ds \left|\frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a)\right| \|b_1\|_T \mathbb{E}[(1 + |\bar{X}^i_s|^{2q})|X^i_s - \bar{X}^i_s|].$$

Il existe donc une constante C_2, telle que

$$(2)_i \leq C_2 \left| \frac{N_n}{N_n + M_n} - (1-a) \right| \int_0^t \mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2]^{1/2} ds. \tag{2.7}$$

ii) On revient maintenant au premier terme de la formule (2.4) :

$$2\mathbb{E} \int_0^t \left(\frac{1}{N_n + M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s, \bar{X}_s^i) \right) (X_s^i - \bar{X}_s^i) ds = a_i + b_i + c_i$$

où

$$a_i = \frac{2}{N_n + M_n} \mathbb{E} \int_0^t \sum_{k=1}^{M_n} (\phi(X_s^i - Y_s^k) - \phi(\bar{X}_s^i - Y_s^k))(X_s^i - \bar{X}_s^i) ds,$$

$$b_i = \frac{2}{N_n + M_n} \mathbb{E} \int_0^t \sum_{k=1}^{M_n} (\phi(\bar{X}_s^i - Y_s^k) - \phi(\bar{X}_s^i - \bar{Y}_s^k))(X_s^i - \bar{X}_s^i) ds,$$

$$c_i = \left(\frac{2M_n}{N_n + M_n} - 2a \right) \mathbb{E} \int_0^t b_3(s, \bar{X}_s^i)(X_s^i - \bar{X}_s^i) ds.$$

On majore successivement toutes ces quantités :

$$a_i \leq \frac{2M_n}{M_n + N_n} K \mathbb{E} \int_0^t (X_s^i - \bar{X}_s^i)^2 ds,$$

car ϕ est lipschitzienne de paramètre $K > 0$.

$$b_i \leq \frac{2K}{N_n + M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \int_0^t \left\{ \mathbb{E}[(Y_s^k - \bar{Y}_s^k)^2] \mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2] \right\}^{1/2} ds.$$

Enfin, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$c_i \leq C_3 \left| \frac{M_n}{N_n + M_n} - a \right| \int_0^t \mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2]^{1/2} ds,$$

où la constante C_3 vaut $2M_\phi$.
On regroupe toutes les inégalités obtenues concernant (2.6), (2.7), a_i, b_i et c_i. Pour cela, on pose $w(t) = \mathbb{E}[(X_t^1 - \bar{X}_t^1)^2]$ et $\bar{w}(t) = \mathbb{E}[(Y_t^1 - \bar{Y}_t^1)^2]$, alors

$$w(t) \leq a(N_n, M_n) \int_0^t \sqrt{w(s)} ds + 2K \frac{M_n}{N_n + M_n} \int_0^t w(s) ds + 2K \frac{M_n}{N_n + M_n} \int_0^t \sqrt{w(s)\bar{w}(s)} ds,$$

où $a(N_n, M_n) = \frac{C_1 \sqrt{N_n}}{N_n + M_n} + C_2 \left| \frac{N_n}{N_n + M_n} - (1-a) \right| + C_3 \left| \frac{N_n}{N_n + M_n} - a \right|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.
On obtient la même équation pour $\bar{w}$ en échangeant N_n et M_n, a et $1-a$. Comme $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a

$$w(t) \leq a(N_n, M_n) \int_0^t \sqrt{w(s) + \bar{w}(s)} ds + 3K \frac{M_n}{N_n + M_n} \int_0^t w(s) + \bar{w}(s) ds,$$

et
$$\bar{w}(t) \leq a'(N_n,M_n)\int_0^t \sqrt{w(s)+\bar{w}(s)}ds + 3K\frac{N_n}{N_n+M_n}\int_0^t w(s)+\bar{w}(s)ds.$$
En faisant la somme de ces deux expressions et en appliquant le Lemme 2, on trouve
$$(w+\bar{w})(t) \leq \left\{\frac{a(N_n,M_n)+a'(N_n+M_n)}{3K}(e^{3Kt}-1)\right\}^2.$$
Ainsi, on en déduit
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]} w(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]} \bar{w}(t) = 0.$$

QED

Remarque 3 *Si, à partir d'un certain rang, $\frac{N_n}{M_n}$ est constant, alors les calculs se simplifient dans la démonstration précédente et, de plus, il existe des constantes $C_4 > 0$ et $C_5 > 0$ telles que*
$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \bar{X}_t^i)^2] \leq \frac{C_4}{N_n},$$
et
$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(Y_t^{i,M_n} - \bar{Y}_t^i)^2] \leq \frac{C_5}{M_n}.$$
Voici un deuxième résultat de convergence :

Proposition 11 *Pour $T < \infty$, $i \in \mathbb{N}^*$,*
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \bar{X}_t^i)^4] = 0,$$
et
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(Y_t^{i,M_n} - \bar{Y}_t^i)^4] = 0.$$

Preuve : En utilisant la formule d'Itô, on trouve
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^i - \bar{X}_t^i)^4] &= 4\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s,\bar{X}_s^i)\right)(X_s^i - \bar{X}_s^i)^3 ds \\
&\quad -4\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{j=1}^{M_n}\beta(X_s^i - X_s^j) - (1-a)b_1(s,\bar{X}_s^i)\right)(X_s^i - \bar{X}_s^i)^3 ds \\
&= a_i + b_i + c_i,
\end{aligned}$$
où
$$a_i = 4\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s,\bar{X}_s^i)\right)(X_s^i - \bar{X}_s^i)^3 ds,$$
$$b_i = -\frac{4}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n}(\beta(X_s^i - X_s^j) - \beta(\bar{X}_s^i - \bar{X}_s^j))(X_s^i - \bar{X}_s^i)^3 ds,$$

$$c_i = -4\left(\frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a)\right)\int_0^t \mathbb{E}[b_1(s,\bar{X}_s^i)(X_s^i - \bar{X}_s^i)^3]ds.$$

Comme ϕ est bornée par M_ϕ, on trouve

$$\begin{aligned} a_i &\leq 4M_\phi\left(\frac{M_n}{N_n+M_n}+a\right)\int_0^t \mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^3 ds \\ &\leq 4M_\phi\left(\frac{M_n}{N_n+M_n}+a\right)\int_0^t \left\{\mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2 \mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^4\right\}^{1/2} ds \\ &\leq 4(1+a)M_\phi\left\{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2\right\}^{1/2}\int_0^t \{\mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^4\}^{1/2} ds. \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve précédente pour majorer $(1)_i$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N_n} b_i \leq 0.$$

Enfin, comme $\mathbb{E}[X_0^{8q}] < \infty$, on a, par la Proposition 2 et la condition (1.3), $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[b_1(t,\bar{X}_t^1)^4] < \infty$, et ainsi

$$\begin{aligned} c &\leq 4\left|\frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a)\right|\int_0^t \mathbb{E}[b_1(s,\bar{X}_s^1)^4]^{1/4}\mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^4]^{3/4} ds \\ &\leq C_6\left|\frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a)\right|\int_0^t \mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^4]^{3/4} ds \\ &\leq C_6 T\left|\frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a)\right|\left\{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^4\right\}^{3/4} \end{aligned}$$

Si on pose $\xi = \{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^4\}^{1/4}$, ξ satisfait à l'inégalité

$$\xi^2 \leq C_8 T\left|\frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a)\right|\xi + C_7\left\{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2\right\}^{1/2}.$$

Comme d'après la proposition précédente $\{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2\}^{1/2} \to 0$ alors $\xi \to 0$, ce qui termine la démonstration. **QED**

Remarque 4 *Si, à partir d'un certain rang, $\frac{N_n}{M_n}$ est constant, alors la démonstration se simplifie et il existe une constante $C_8 > 0$ telle que*

$$\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^{i,N_n} - \bar{X}_s^i|^4] \leq \frac{C_8}{N_n}.$$

Le même résultat est valable pour Y.

Preuve du Théorème 4 : Par la formule d'Itô, on a

$$(X_t^i - \bar{X}_t^i)^2 = 2\int_0^t \left(\frac{1}{N_n + M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s,\bar{X}_s^i) \right) (X_s^i - \bar{X}_s^i) ds \tag{2.8}$$

$$-2\int_0^t \left(\frac{1}{N_n + M_n} \sum_{j=1}^{N_n} \beta(X_s^i - X_s^j) - (1-a)b_1(s,\bar{X}_s^i) \right) (X_s^i - \bar{X}_s^i) ds \tag{2.9}$$

En prenant les valeurs absolues, le supremum sur $[0,T]$ et l'espérance, on obtient les mêmes majorations pour le premier terme (2.8) de l'égalité précédente que celles effectuées dans la Proposition 10, ainsi

$$\begin{aligned}
&2\int_0^T \left(\frac{1}{N_n + M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s,\bar{X}_s^i) \right) (X_s^i - \bar{X}_s^i) ds \\
&\leq \frac{2M_n}{N_n + M_n} K \mathbb{E} \int_0^T (X_s^i - \bar{X}_s^i)^2 ds \\
&+ \frac{2K}{N_n + M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \int_0^T \left\{ \mathbb{E}[(Y_s^k - \bar{Y}_s^k)^2] \mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2] \right\}^{1/2} ds \\
&+ \frac{C_9 \sqrt{M_n}}{N_n + M_n} \int_0^T \mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2]^{1/2} ds + C_{10} \left| \frac{M_n}{N_n + M_n} - a \right| \int_0^T \mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2]^{1/2} ds \\
&\leq \frac{2M_n}{N_n + M_n} K \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2] + \frac{2K}{N_n + M_n} \left\{ \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|Y_s^i - \bar{Y}_s^i|^2] \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2] \right\}^{1/2} \\
&+ C_{11} \left(\frac{\sqrt{M_n}}{N_n + M_n} + \left| \frac{M_n}{N_n + M_n} - a \right| \right) \left\{ \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2] \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 10, cette somme tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Plus précisément, si $\frac{N_n}{M_n}$ est constant à partir d'un certain rang, alors il existe une constante $C_{12} > 0$ telle que

$$2\int_0^T \left(\frac{1}{N_n + M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s,\bar{X}_s^i) \right) (X_s^i - \bar{X}_s^i) ds \leq \frac{C_{12}}{N_n}.$$

En ce qui concerne le deuxième terme, c'est-à-dire (2.9), on trouve une majoration par $a_i + b_i$, où

$$a_i = \frac{2}{N_n + M_n} \sum_{j=1}^{N_n} \int_0^T \left(|\rho_{i,j}^{(1)}(s)| + |\rho_{i,j}^{(2)}(s)| \right) ds,$$

avec

$$\rho_{i,j}^{(1)}(s) = [\beta(X_s^i - X_s^j) - \beta(\bar{X}_s^i - \bar{X}_s^j)](X_s^i - \bar{X}_s^i),$$

$$\rho_{i,j}^{(2)}(s) = [\beta(\bar{X}_s^i - \bar{X}_s^j) - b_1(s,\bar{X}_s^i)](X_s^i - \bar{X}_s^i),$$

et

$$b_i = C_{13}\left|\frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a)\right|\left\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2]\right\}^{1/2}$$

Il est évident que, d'après la Proposition 10, b_i tend vers 0 quand $n \to \infty$ et qui plus est, ce terme est nul si $\frac{N_n}{M_n}$ est constant à partir d'un certain rang. On cherche maintenant à majorer a_i.
Comme on a déjà vu précédemment

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N_n}|\rho_{i,j}^{(2)}(s)|\right) \leq \left\{\mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2]\theta_i(s)\right\}^{1/2} \leq C_{14}\sqrt{N_n}\left\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2]\right\}^{1/2}.$$

D'où

$$\frac{2}{N_n+M_n}\int_0^T \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N_n}|\rho_{i,j}^{(2)}(s)|\right)ds \leq \frac{2TC_{14}\sqrt{N_n}}{N_n+M_n}\left\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2]\right\}^{1/2}.$$

Le second membre converge vers 0 quand $n \to \infty$ et si $\frac{N_n}{M_n}$ est constant à partir d'un certain rang, alors il est majoré par une constante multipliée par $\frac{1}{N_n}$.
Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\rho_{i,j}^{(1)}(s)|] &\leq \left\{\mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2]\mathbb{E}[(\beta(X_s^i - Y_s^j) - \beta(\bar{X}_s^i - \bar{Y}_s^j)^2]\right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{\mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i)^2]\right\}^{1/2} \\
&\quad \times\left\{\mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i + \bar{X}_s^i - X_s^j)^2(c + |X_s^i - X_s^j|^r + |\bar{X}_s^i - \bar{X}_s^j|^r)^2]\right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\rho_{i,j}^{(1)}(s)|] &\leq \left\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2]\right\}^{1/2} \\
&\quad \times\mathbb{E}[(X_s^i - \bar{X}_s^i + \bar{X}_s^i - X_s^j)^4]^{1/4}\mathbb{E}[(c + |X_s^i - X_s^j|^r + |\bar{X}_s^i - \bar{X}_s^j|^r)^4]^{1/4} \\
&\leq C_{15}\left\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^2]\right\}^{1/2}\left\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_s^i - \bar{X}_s^i|^4]\right\}^{1/4}
\end{aligned}$$

Ce dernier terme tend également vers 0 quand $n \to \infty$, d'après les Propositions 10 et 11, et si $\frac{N_n}{M_n}$ est constant à partir d'un certain rang, alors

$$\frac{2N_n}{N_n+M_n}\int_0^T \mathbb{E}[|\rho_{i,j}^{(1)}(s)|]ds \leq \frac{C_{16}}{N_n^{3/4}}.$$

On en déduit donc le résultat du théorème. **QED**

Remarque 5 *Si $\frac{N_n}{M_n}$ est constant à partir d'un certain rang, alors il existe une constante $L > 0$, dépendant de T, telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}|X_s^{i,N_n} - \bar{X}_s^i|^2\right] \leq \frac{L}{N_n^{3/4}}.$$

Le même résultat est bien entendu valable pour Y.

2.2.2 Inégalité de concentration

Dans cette section, on cherche à décrire la répartition des particules, solutions du système (F) autour de leur moyenne mais aussi autour de la moyenne de (X_t,Y_t). Toute cette étude se fait à temps fixé $t > 0$. On utilisera essentiellement des propriétés liées aux inégalités de Sobolev logarithmiques détaillées dans [M] et dans le livre [A-co].
On supposera pour la suite que β et ϕ sont des fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}^1$ et on notera $(X_t^{N_n},Y_t^{M_n})$ la solution du système à $N_n + M_n$ équations (F). Pour une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$, on définit la norme

$$\|f\|_{Lip} = \inf\{M > 0;\ \forall x,y \in \mathbb{R}^d,\ |f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|\}.$$

On a alors l'inégalité de concentration suivante :
Proposition 12 *Pour tout $T > 0$ et $t \in [0,T]$, et pour $F_n : \mathbb{R}^{N_n+M_n} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne vérifiant $\|F_n\|_{Lip} \leq 1$, on a*

$$\mathbb{P}(|F_n(X_t^{N_n},Y_t^{M_n}) - \mathbb{E}[F_n(X_t^{N_n},Y_t^{M_n})]| \geq r) \leq 2\exp -\frac{r^2}{4C_T},\quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall r \geq 0, \qquad (2.10)$$

où $C_T = (e^{4\|\phi'\|_\infty T} - 1)/\|\phi'\|_\infty$.
En particulier, si on prend la fonction

$$F_n(x) = \frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} f(x_i),$$

où f est une fonction lipschitzienne telle que $\|f\|_{Lip} \leq 1$, alors $\|F_n\|_{Lip} \leq 1/\sqrt{N_n}$ et donc, en appliquant la proposition précédente, on obtient, pour $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} f(X_t^i) - \mathbb{E}[f(X_t^1)]\right| \geq r\right) \leq 2\exp -\frac{N_n r^2}{4C_T}\quad \forall r \geq 0. \qquad (2.11)$$

On obtient exactement la même inégalité pour Y en remplaçant N_n par M_n.
Preuve : Soit $(X_t^{N_n},Y_t^{M_n})$ la solution du système à $N_n + M_n$ équations (F). Ce processus de Markov continu a alors pour générateur infinitésimal

$$L^n = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_n+M_n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N_n+M_n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad x \in \mathbb{R}^{N_n+M_n},$$

avec

$$b_i(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_n}\beta(x_i - x_k) + \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\phi(x_i - x_k), \\ \text{pour}\quad 1 \leq i \leq N_n, \\ \\ -\dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\beta(x_i - x_k) + \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_n}\phi(x_i - x_k), \\ \text{pour}\quad N_n + 1 \leq i \leq N_n + M_n. \end{cases} \qquad (2.12)$$

D'après le Théorème de Herbst (voir par exemple [A-co] p.74), l'inégalité de concentration de constante $C_T = 2(1-e^{-2\rho T})/\rho$ est une conséquence de l'inégalité de Sobolev logarithmique satisfaite par le semi-groupe associé au générateur L^n. Il suffit donc de vérifier le critère de Bakry-Emery (voir [Ba-E]), c'est-à-dire, pour tout $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{N_n+M_n})$,

$$\Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f),$$

où Γ est l'opérateur "carré du champ",

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}[L^n(fg) - gL^nf - fL^ng],$$

et

$$\Gamma_2(f) = \frac{1}{2}[L^n\Gamma(f) - 2\Gamma(f,L^ng)].$$

Or, pour démontrer ce critère, il suffit de montrer que le spectre du tenseur de courbure de Ricci associé au générateur L^n est minoré par ρ (voir, par exemple [A-co] p.60). Ici, le tenseur de Ricci $(R_{i,j})_{1\leq\ i,j\leq N_n+M_n}$ est défini par

$$R_{i,j} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right],\ \ i \neq j,$$

et

$$R_{i,i} = -\frac{\partial b_i}{\partial x_i}.$$

En faisant les calculs, on obtient :
si $1 \leq i,j \leq N_n$ et $i \neq j$ ou $N_n + 1 \leq i,j \leq N_n + M_n$ et $i \neq j$, alors

$$R_{i,j}(x) = -\frac{1}{N_n + M_n}\beta'(x_i - x_j),$$

si $1 \leq i \leq N_n$ et $N_n + 1 \leq j \leq N_n + M_n$ ou $1 \leq j \leq N_n$ et $N_n + 1 \leq i \leq N_n + M_n$, alors

$$R_{i,j}(x) = \frac{1}{N_n + M_n}\phi'(x_i - x_j),$$

si $1 \leq i \leq N_n$, alors

$$R_{i,i}(x) = \frac{1}{N_n + M_n}\sum_{k=1}^{N_n}\beta'(x_i - x_k) - \frac{1}{N_n + M_n}\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\phi'(x_i - x_k),$$

enfin si $N_n + 1 \leq i \leq N_n + M_n$, alors

$$R_{i,i}(x) = \frac{1}{N_n + M_n}\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\beta'(x_i - x_k) - \frac{1}{N_n + M_n}\sum_{k=1}^{N_n}\phi'(x_i - x_k).$$

En appliquant le Théorème de Gershgorin-Haddamard (voir, par exemple, [M-M] p. 146), on sait que le spectre de R est inclus dans la réunion des boules euclidiennes

$$\text{spectre}(R) \subset \bigcup_{i=1}^{N_n+M_n} B\left(R_{i,i}, \sum_{j\neq i}|R_{i,j}|\right).$$

Ainsi, toute valeur propre est minorée par

$$\frac{\beta'(0)}{N_n + M_n} - 2\|\phi'\|_\infty \geq -2\|\phi'\|_\infty.$$

Ceci termine la preuve en prenant $\rho = -2\|\phi'\|_\infty$ et donc $C_T = (e^{4\|\phi'\|_\infty T} - 1)/\|\phi'\|_\infty$. **QED**
En particulier, si $N_n/(N_n + M_n)$ est constant à partir d'un certain rang (pour $n \geq n_0$), alors on obtient le résultat suivant

Corollaire 2 *Il existe une constante $K_T > 0$ telle que, pour toute fonction lipschitzienne vérifiant $\|f\|_{Lip} \leq 1$, on a*

$$\sup_{t \leq T} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} f(X_t^{i,N_n}) - \int_{\mathbb{R}} f(y) u_t(y) dy \right| \geq r + \sqrt{\frac{K_T}{N_n}} \right) \leq 2 \exp - \frac{N_n r^2}{4 C_T}, \qquad (2.13)$$

pour tout $r \geq 0$. C_T est donnée par (2.10) et K_T est la constante apparaissant dans la Remarque 3, $u_t(x)dx$ est la loi de $\bar{X}_t^1$ solution de l'équation (2.3). De même,

$$\sup_{t \leq T} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{M_n} \sum_{i=1}^{M_n} f(Y_t^{i,M_n}) - \int_{\mathbb{R}} f(y) v_t(y) dy \right| \geq r + \sqrt{\frac{K_T}{M_n}} \right) \leq 2 \exp - \frac{M_n r^2}{4 C_T}, \qquad (2.14)$$

où $v_t(x)dx$ est la loi de $\bar{Y}_t^1$ solution de (2.3).

Preuve : La preuve de ce résultat est simple : il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} f(X_t^{i,N_n}) - \mathbb{E}[f(X_t^{i,N_n})] \right| + \left| \mathbb{E}[f(X_t^{i,N_n})] - \int_{\mathbb{R}} f(y) u_t(y) dy \right|.$$

Or, comme f est lipschitzienne de norme inférieure à 1, grâce à la Remarque 3 et à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le second membre de l'expression ci-dessus est majoré par

$$(\mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \bar{X}_t^i)^2])^{1/2} \leq \sqrt{\frac{K_T}{N_n}}.$$

Pour terminer la preuve, il suffit alors d'appliquer (2.11). La preuve de (2.14) est identique à celle de (2.13). **QED**

Références

[A-co] C. ANÉ, S. BLACHÈRE, D. CHAFAÏ, P. FOUGÈRES, I. GENTIL, F. MALRIEU, C. ROBERTO et G. SCHEFFER, *Autour de l'inégalité de Sobolev Logarithmique*, à paraître dans Panor. Synth., 2000.

[B] P.R. BEESACK, *Gronwall inequalities*, Carleton mathematical lecture notes 011, 1975.

[Ba] D. BAKRY, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes*, Ecole d'Été de Saint -Flour XXII. Lectures Notes in Math., vol. 1581. Springer, Berlin, pp. 1-112, 1992.

[Ba-E] D. BAKRY et M. EMERY, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, pp. 177-206, 1985.

[B-R-T-V] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, D. TALAY et P. VALLOIS, *Nonlinear self-stabilizing processes - I Existence, invariant probability, propagation of chaos*, Stochastic Processes and their Applications 75, pp. 173-201, 1998.

[B-R-V] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE et P. VALLOIS, *Nonlinear self-stabilizing processes - II: Convergence to invariant probability*, Stochastic Processes and their Applications 75, pp. 203-224, 1998.

[D-S] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, *Linear Operators, Part II Spectral Theory*, Interscience, New-York, 1963.

[Du] R.M. DUDLEY, *Probabilities and metrics : convergence of laws on metric spaces with a view to statistical testing*, Aarhus universitet, Lecture notes series 045, 1976.

[G-T] D. GILBARG et N.S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Gründlehren der Math. Wissenschaften., vol. 224, Spinger, Berlin, 1977.

[K-S] I. KARATZAS et S. E. SHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer Verlag, 1991.

[K-K-R] O. KAVIAN, G. KERKYACHARIAN et B. ROYNETTE, *Quelques remarques sur l'ultracontractivité*, J. Funct. Anal. vol. 111, pp. 155-196, 1993.

[M] F. MALRIEU, *Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's*, prépublication de l'Université Paul Sabatier, Toulouse.

[M-M] M. MARCUS et H. MINC, *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Allyn and Bacon, Boston, 1964.

Troisième partie

Diffusions renforcées

Introduction

Soit l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dZ_t = dB_t - \left(\int_0^t \Phi(Z_t - Z_s) ds \right) dt \\ Z_0 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où B est un mouvement Brownien unidimensionnel.
Dans cette équation, la dérive dépend de tout le passé de la trajectoire. Nous nous intéressons alors au comportement asymptotique des solutions de cette équation à mémoire longue où Φ est une fonction impaire mesurable et bornée, et nous cherchons à établir les cas pour lesquels les trajectoires de la solution de l'E.D.S. convergent et ceux pour lesquels elles restent juste bornées. La motivation de ce travail repose sur l'étude des marches aléatoires renforcées: R. Pemantle et S. Volkov (voir [P-V]) ont étudié le processus $X_0, X_1, X_2, \ldots$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. En définissant

$$Z(n,v) = 1 + \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{X_i = v}$$

le nombre de fois plus un où le processus visite v avant le temps n, la marche aléatoire renforcée par sommets sur $\mathbb{Z}$ est alors donnée par sa loi:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | \mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_{x \sim X_n} \frac{Z(n,x)}{\sum_{w \sim X_n} Z(n,w)}$$

où $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par $X_0, \ldots, X_n$ et la relation de voisinage est notée $\sim$.
R. Pemantle et S. Volkov montrent alors que les trajectoires sont presque sûrement bornées, plus particulièremnt, si $R = \{k \ : \ X_n = k \text{ pour un certain } n\}$ est le support aléatoire du processus $X_0, X_1 \ldots$, alors $\mathbb{P}(|R| = 5) > 0$ et $\mathbb{P}(|R| < \infty) = 1$. Ils donnent de plus le comportement asymptotique de manière assez précise. En tout cas, il s'agit d'un résultat quelque peu étonnant. Tout ceci nous motive à observer ce qui se passe dans le cas continu, c'est-à-dire dans le cas d'une diffusion renforcée vérifiant l'équation (1), en d'autres termes dans le cas d'une équation différentielle à mémoire longue (la dérive dépend de toute la trajectoire). Evidemment, la correspondance avec le cas discret s'arrête au niveau de la motivation puisque, dans le cas continu, la dérive dépend de tout le passé, c'est-à-dire de ce qui se passe dans tout l'espace et non pas juste sur des "positions voisines".
Dans le cas de diffusions, ce problème a déja été étudié pour quelques fonctions Φ particulières. M. Cranston et Y. Le Jan ont étudié deux cas particuliers sur $\mathbb{R}$: le premier

concerne la fonction $\Phi(x) = ax$, avec a une constante strictement positive. La solution de l'E.D.S. s'exprime alors de façon explicite sous forme intégrale et, de plus, les trajectoires convergent presque sûrement (voir [C-LJ]). Le second cas concerne l'*interaction constante* c'est-à-dire $\Phi(x) = a\,\mathrm{sgn}(x)$. Pour cette fonction Φ la solution n'est pas explicite mais M. Cranston et Y. Le Jan prouvent tout de même la convergence des trajectoires par des résultats de comparaison. O. Raimond ([Ra]) étend le résultat dans le cas de l'interaction constante sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ en considérant la fonction $\Phi(x) = \frac{ax}{||x||}$.

Le but de cette partie est d'étendre les résultats de M. Cranston et Y. Le Jan pour d'autres fonctions sur $\mathbb{R}$. Le premier chapitre montrera que le problème est bien posé en présentant un résultat d'existence et d'unicité pour l'E.D.S. (1).
Dans le second chapitre, nous nous attacherons au cas où la fonction Φ, impaire et bornée, n'est pas identiquement nulle au voisinage de l'origine. Nous étudierons alors deux cas: le cas d'une fonction croissante et le cas d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans le premier cas nous établirons le résultat suivant:
Théorème *S'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P_k de degré $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} P_k(x) = +\infty$ tels que, au voisinage de l'origine,*

$$|\Phi(x)| \geq C \exp -P_k\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

la solution Z_t de l'E.D.S. (1) *converge p.s. quand $t \to \infty$.*
Ce théorème très fort, puisque la condition est très peu restrictive, est une extension de celui de M. Cranston et Y. Le Jan. La croissance de la fonction est un élément fondamental dans la preuve de ce théorème. Dans le cas contraire nous n'arrivons pas à obtenir la convergence, en particulier, nous ne montrerons pour les fonctions décroissantes et continues sur $\mathbb{R}_+^*$, que la bornitude presque sûre des trajectoires (avec quelques conditions sur le comportement de Φ près de l'infini).
Enfin, dans le dernier chapitre, nous étudierons le cas où Φ est identiquement nulle au voisinage de l'origine en prenant $\Phi(x) = \mathrm{sgn}(x)\mathbb{1}_{\{|x|\geq a\}}$, avec $a > 0$. Ce cas qui ne se distingue pas beaucoup du précédent puisque la condition du Théorème est suffisamment faible, a en fait un comportement complètement différent. M. Cranston et Y. Le Jan avaient déjà fait remarquer que, dans ce cas, les trajectoires de la solution de l'E.D.S. ne convergeaient pas presque sûrement. Nous nous attacherons à montrer qu'elles sont néanmoins bornées presque sûrement.
Toute cette étude a fait l'objet d'une prépublication [H-R].

Chapitre 1

Existence et unicité

Dans cette section, on s'attache à démontrer l'existence et l'unicité des solutions de l'E.D.S. (1) dont le comportement des trajectoires sera étudié plus en détail dans les sections suivantes.

Proposition 1 – *Si ϕ est une fonction mesurable bornée, alors il existe une unique solution faible de l'E.D.S.* (1),
- *si Φ est continue alors il existe au plus une solution forte,*
- *si Φ est lipschitzienne il existe une unique solution forte.*

Preuve : On commence par définir une famille brownienne $Z = \{\{Z_t,\mathcal{F}_t^Z : 0 \le t < \infty\}, \Omega,\mathcal{F}_\infty^Z, \mathbb{P}\}$ où $\mathcal{F}_\infty^Z$ est la tribu engendrée par Z. En utilisant le Corollaire 3.5.16 p. 200 dans [K-S], on sait que

$$R_t = \exp\left\{\int_0^t \left(\int_0^s \Phi(Z_s - Z_u)du\right) dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_0^s \Phi(Z_s - Z_u)du\right)^2 ds\right\}$$

est une martingale continue. De plus, comme la dérive est localement bornée, la formule de Girsanov (voir, par exemple, Corollaire 3.5.2 dans [K-S]) implique qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t^Z$ pour tout $t > 0$ telle que B, défini par

$$B_t = Z_t - Z_0 + \int_0^t \int_0^s \Phi(Z_s - Z_u)duds \quad 0 \le t < \infty$$

soit un $\mathcal{F}_t^Z$-mouvement brownien sur $(\Omega,\mathcal{F}_\infty^Z,\mathbb{Q})$ avec $\mathbb{Q}[B_0 = 0] = 1$. On en déduit donc qu'il existe une unique solution faible à l'équation (1).
De plus, pour toute fonctionnelle bornée F,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[F(Z_\bullet; 0 \le \bullet \le t)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(B_\bullet; 0 \le \bullet \le t)R_t\right]$$

la loi de Z est entièrement déterminée: la solution est donc unique en loi.
Si, de plus, Φ est une fonction continue, alors, pour $T < \infty$,

$$b(t,x(.)) = -\int_0^t \Phi(x_t - x_s)ds, \;\; x \in \mathcal{C}([0,T]),$$

est une fonction continue par rapport aux deux variables t et $x(.)$. Comme la dérive est localement bornée, on en déduit que l'équation (1) admet au plus une solution forte (voir, par exemple, Corollaire 1 p.271 dans [G-S]).
Enfin si Φ est lipschitzienne, on applique le Théorème 11.2 de [R-W] qui assure l'existence d'une unique solution forte. **QED**

Remarque 1 *Par les mêmes arguments, on montre qu'il existe une unique solution faible Z^x à l'équation*

$$Z_t^x = x + B_t - \int_0^t \int_0^s \Phi(Z_s^x - Z_u^x) duds,\ 0 \leq t < \infty.$$

De plus, Z^x a la même loi que $x + Z^0$.
On n'étudiera donc, par la suite, que les solutions partant de l'origine.

Chapitre 2

Si le support de Φ contient un voisinage de l'origine

Dans cette section, Φ est une fonction impaire dont le support contient un voisinage de l'origine. On distingue alors deux cas: le premier concerne les fonctions continues et croissantes. Dans ce cas, sous certaines conditions supplémentaires, les trajectoires de l'unique solution forte (voir Proposition 1) sont presque sûrement convergentes. Le second cas est celui des fonctions continues et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, sous certaines conditions, on ne montre que la bornitude des trajectoires.

2.1 Cas d'une fonction croissante

On suppose, dans ce paragraphe, que Φ est une fonction impaire continue croissante bornée. Sous ces hypothèses, il est existe une unique solution forte à l'équation (1) et, de plus, on obtient le résultat suivant

Théorème 1 *S'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P_k de degré $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} P_k(x) = +\infty$ tels que, au voisinage de l'origine,*

$$|\Phi(x)| \geq C \exp -P_k\left(\frac{1}{|x|}\right), \tag{2.1}$$

la solution Z_t de l'E.D.S. (1) converge p.s. quand $t \to \infty$.

Pour montrer ce théorème, on a besoin de quelques résultats concernant l'équation suivante:

$$\begin{cases} dY_t = dW_t - \left(\int_0^t \Phi(Y_t - Y_s)ds + V(Y_t)\right) dt \\ Y_0 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où W est un mouvement Brownien et V une fonction mesurable localement bornée positive sur $\mathbb{R}_+$. On note $\mathbb{P}^{(V)}$ la loi de Y.

Proposition 2 *Sous les hypothèses du Théorème 1, on a*

- *a)* $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} Y_t < \infty \quad \mathbb{P}^{(V)}$ *p.s.*

– *b) si $V(x) \geq \eta > 0$ pour $x \geq 0$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}^{(V)}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} Y_t > \varepsilon\right) \leq \varphi_\varepsilon(\eta)$$

où $\lim_{\eta\to\infty} \varphi_\varepsilon(\eta) = 0$.

Pour la suite, on pose $\mu_t = \int_0^t \delta_{Y_s} ds$. On remarque que (Y_t,μ_t) est un processus de Markov. De plus,

Lemme 1 *Pour tout temps d'arrêt τ, la loi conditionnelle de $Y_{t+\tau} - Y_\tau$ sachant (Y_τ,μ_τ) coincide, sous $\mathbb{P}^{(V)}$, avec $\mathbb{P}^{(V_\tau)}$ où*

$$V_\tau(x) = V(x + Y_\tau) + \int \Phi(x + Y_\tau - y)\mu_\tau(dy). \tag{2.3}$$

La preuve du Lemme 1 est évidente.

Preuve de la Proposition 2

i) Soit la suite $L_0 = 0$, $L_n = L_{n-1} + l_n$ où $l_n = R/n^2$ avec $R > 0$. Comme la série des $(l_n)_{n\geq 1}$ converge, on peut noter $L_\infty = \lim_{n\to\infty} L_n$. On remarque que $\lim_{R\to\infty} L_\infty = +\infty$. On définit également une suite positive $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ qui tend vers l'infini. On précisera cette suite un peu plus loin. Par ailleurs, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ on note $S_a = \inf\{t > 0, Y_t = a\}$, puis on définit la suite $\tau_0 = 0$ et $\tau_n = S_{L_n}$.

Pour montrer que les trajectoires de Y sont presque sûrement majorées, il suffit de considérer l'événement

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty}\{\tau_{n+1} - \tau_n > \alpha_{n+1} \text{ ou } \tau_n = \infty\},$$

et de montrer que $\lim_{R\to\infty} \mathbb{P}(A^c) = 0$. En effet, on dispose de l' inclusion :

$$\{\sup Y_t < L_\infty\} \supseteq A.$$

Or, par le Lemme 1, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c) &\leq \mathbb{P}(\tau_1 \leq \alpha_1)\\ &+ \sum_1^\infty \mathbb{E}\left[\prod_0^{n-1} \mathbb{1}_{\{\infty>\tau_{j+1}-\tau_j>\alpha_{j+1}\}}\mathbb{P}^{(V_n)}(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1})\right]\end{aligned} \tag{2.4}$$

en notant $V_n = V_{\tau_n}$. Toujours d'après le Lemme 1, on connaît V_n:

$$V_n(x) = \int \Phi(x + Y_{\tau_n} - y)\mu_{\tau_n}(dy) + V(x + Y_{\tau_n}).$$

Comme Φ est une fonction croissante, $\Phi(x + Y_{\tau_n} - y) \geq \Phi(Y_{\tau_n} - y)$ pour tout $x \geq 0$. De plus, puisque $V(x) \geq \eta$ pour $x \geq 0$, on a : sous $\mathbb{P}^{(V)}$, sur l'événement $\cap_0^{n-1}\{\infty > \tau_{j+1} - \tau_j > \alpha_{j+1}\}$ et sur l'intervalle $[\tau_n,\tau_{n+1} \wedge (\tau_n + \alpha_{n+1})]$, pour $x \geq 0$,

$$V_n(x) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \Phi\left(\sum_{k=j+1}^{n} l_k\right) + \eta$$

(On prendra $\eta = 0$ pour démontrer a)). C'est pourquoi l'opposé de la dérive de Y sur $[\tau_n, \tau_{n+1} \wedge (\tau_n + \alpha_{n+1})]$ et pour $x \geq 0$, est minoré par

$$D_n := \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \Phi \left(\sum_{k=j+1}^{n} l_k \right) + \eta - \alpha_{n+1} \Phi(l_{n+1}). \tag{2.5}$$

Comme

$$\sum_{k=j+1}^{n} l_k = R \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq R \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{n+1} \right),$$

et comme Φ est une fonction croissante, on a la minoration

$$D_n \geq \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \Phi \left(\frac{R}{j+1} - \frac{R}{n+1} \right) + \eta - \alpha_{n+1} \Phi \left(\frac{R}{(n+1)^2} \right). \tag{2.6}$$

On va maintenant se servir de la condition sur la fonction Φ : il existe donc une constante $C > 0$ et un polynôme P_k de degré $k \in \mathbb{N}^*$ tels que, au voisinage de l'origine,

$$|\Phi(x)| \geq C \exp -P_k \left(\frac{1}{|x|} \right).$$

On pose alors

$$\alpha_n = \frac{n^{k+3}}{\left(\frac{R}{2(n+1)} \right)}, \quad \text{pour } n > 2,$$

et $\alpha_2 = 1/\Phi(R/4)$.
Ainsi, comme Φ est une fonction croissante, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
D_n &\geq \sum_{j=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \alpha_j \Phi \left(\frac{R}{2(j+1)} \right) - \alpha_{n+1} \Phi \left(\frac{R}{(n+1)^2} \right) + \eta \\
&\geq \sum_{j=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} j^{k+3} - (n+1)^{k+3} \frac{\Phi \left(\frac{R}{(n+1)^2} \right)}{\Phi \left(\frac{R}{2(n+2)} \right)} + \eta \\
&\geq \sum_{j=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} j^{k+3} - (n+1)^{k+3} + \eta \geq \frac{1}{k+3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^{k+4} - (n+1)^{k+3} + \eta := C_n + \eta.
\end{aligned}$$

On définit également $C_2 = -1$.
On remarque alors qu'il existe $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $C_n > 0$.
ii) Pour continuer la preuve de la Proposition 2, on a besoin du résultat suivant, qui sera démontré ultérieurement dans le developpement de cette section.
Proposition 3 *Soient Y_t le processus défini par l'E.D.S.:*

$$\begin{cases} dY_t = dB_t + V(Y_s, s \leq t)dt \\ Y_0 = 0, \end{cases}$$

et Z_t le processus refléchi défini par l'équation

$$\begin{cases} dZ_t = dB_t + Ddt + dL_t \\ Z_0 = 0, \end{cases}$$

où B est un mouvement brownien unidimensionnel et L_t est un processus croissant à variation finie. L_t ne croît que lorsque $Z_t = 0$ de telle sorte que Z_t soit toujours positif ou nul.
Alors, si $V(Y_s,s \leq t) \leq D$ pour tout t tel que $Y_t \geq 0$, on a

$$Y_t \leq Z_t \quad p.s.$$

En utilisant ce résultat de comparaison et l'inégalité $D_n \geq C_n + \eta$, on en déduit

$$\mathbb{P}^{(V_n)}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) \leq \mathbb{Q}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right), \tag{2.7}$$

où $\mathbb{Q}$est la loi du processus Z défini par l'équation

$$\begin{cases} dZ_t = dB_t - (C_n + \eta)dt + dL_t \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

où Z_t est continu, positif et L_t ne croît que lorsque $Z_t = 0$. Or, pour tout $\beta > 0$, on a

$$\mathbb{Q}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) \leq e^{\beta\alpha_{n+1}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta S_{l_{n+1}}}]. \tag{2.8}$$

Soit $a > 0$ et $\beta > 0$, on calcule alors l'expression $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta S_a}]$. Pour cela, on choisit une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f''(x) - (C_n + \eta)f'(x) - \beta f(x) = 0 \quad \text{sur }]0,a[\\ f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(a) = 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

On a alors

$$f(x) = \frac{\lambda^+ e^{\lambda^- x} - \lambda^- e^{\lambda^+ x}}{\lambda^+ e^{\lambda^- a} - \lambda^- e^{\lambda^+ a}}, \text{ sur } [0,a],$$

avec $\lambda^\pm = C_n + \eta \pm \sqrt{(C_n + \eta)^2 + 2\beta}$, ainsi $f(0) = \dfrac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^+ e^{\lambda^- a} - \lambda^- e^{\lambda^+ a}}$. On prolonge cette fonction par la fonction nulle sur $(-\infty,0]$. Grâce à l'équation (2.9) et grâce à la formule d'Itô, on peut montrer que

$$M_t := f(Z_t)e^{-\beta t}$$

est une martingale locale continue. En effet,

$$\begin{aligned} d(f(Z_t)e^{-\beta t}) &= f'(Z_t)e^{-\beta t}dB_t + f'(Z_t)e^{-\beta t}dL_t \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}f''(Z_t) - (C_n + \eta)f'(Z_t) - \beta f(Z_t)\right) e^{-\beta t}dt \\ &= f'(Z_t)e^{-\beta t}dB_t, \end{aligned}$$

car $f'(0) = 0$. De plus, comme f' est localement bornée et bornée au voisinage de $-\infty$, $M_{t\wedge S_a}$ est une martingale uniformément intégrable et ainsi, en appliquant le théorème d'arrêt pour les martingales (voir, par exemple, [K-S] p.19), on obtient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta S_a}] = f(0).$$

On a alors, pour $\beta < 1$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta S_a}] \leq \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{-\lambda^-} e^{-\lambda^+ a} \leq \frac{2(C_n + \eta + 1)^2}{\beta} e^{-2(C_n+\eta)a}.$$

En utilisant l'équation (2.8) et en choisissant $\beta = 1/\alpha_{n+1}$ on obtient, pour n assez grand,

$$\mathbb{Q}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) \leq 2e(C_n + \eta + 1)^2 \alpha_{n+1} e^{-2(C_n+\eta)l_{n+1}}. \tag{2.10}$$

Grâce à l'inégalité (2.7) et à l'hypothèse du Théorème 1, on obtient, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(V_n)}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) &\leq 2e(C_n + \eta + 1)^2 \alpha_{n+1} e^{-2(C_n+\eta)l_{n+1}} \\ &\leq \frac{2e}{C}(C_n + \eta + 1)^2 (n+1)^{k+3} e^{P_k(2(n+2)/R) - 2(C_n+\eta)l_{n+1}}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}^{(V_n)}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) < \infty,$$

puisque $P_k(2(n+2)/R)$ est un polynôme en n de degré k, $C_n l_{n+1}$ est un polynôme de degré $k+2$ et $(C_n+1)^2(n+1)^{k+3}$ un polynôme de degré $2k+7$.
iii) On termine la preuve en considérant deux cas : $\eta = 0$ ou $\eta > 0$. Ainsi, pour démontrer le a) de la proposition, on choisit $\eta = 0$ et $R > 1$, alors, il existe n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, $P_k((2n+4)/R) \leq P_k(2n+4)$ puisque $\lim_{x\to+\infty} P_k(x) = +\infty$, et ainsi

$$\mathbb{P}^{(V_n)}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) \leq \frac{2e}{C}(C_n + \eta + 1)^2 (n+1)^{k+3} e^{P_k(2(n+2)) - 2(C_n+\eta)l_{n+1}}.$$

Dans le second membre de l'inégalité précédente, seul l_{n+1} dépend de R et de manière monotone, ce qui entraîne, par un argument de convergence monotone, qu'il existe n_1 tel que

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{n\geq n_1} \mathbb{P}^{(V_n)}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) = 0.$$

Par ailleurs, $\mathbb{Q}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) \to 0$ lorsque $R \to \infty$ pour $1 \leq n \leq n_1 - 1$. Or d'après (2.4),

$$\mathbb{P}(A^c) \leq \mathbb{P}(\tau_1 \leq \alpha_1) + \sum_{1}^{\infty} \mathbb{P}^{(V_n)}(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}).$$

On en déduit donc a).
Pour le deuxième cas : $\eta > 0$, on choisit R assez petit de telle sorte que $L_\infty = \varepsilon$, et on fait tendre η vers l'infini. Alors, il existe une constante $K > 0$ indépendante de n et η, telle que, pour $n \geq n_1$,

$$\mathbb{P}^{(V_n)}\left(S_{l_{n+1}} < \alpha_{n+1}\right) \leq K e^{P_k(2(n+2)) - (C_n+\eta)l_{n+1}}.$$

A nouveau par un argument de convergence monotone, on en déduit b). QED

Preuve de la Proposition 3 : On rappelle ici la preuve détaillée figurant dans [Ra]. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, telle que:

$$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) > 0 \text{ et } f'(x) > 0, \\ \forall x \leq 0,\ f(x) = 0. \end{cases}$$

Par la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} f(Y_t - Z_t) &= \int_0^t f'(Y_s - Z_s) d(Y_s - Z_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Y_s - Z_s) d < Y_s - Z_s, Y_s - Z_s > \\ &= \int_0^t f'(Y_s - Z_s)(V(Y_u, u \leq s) - D) ds - \int_0^t f'(Y_s - Z_s) dL_s \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s - Z_s > 0\}} f'(Y_s - Z_s)(V(Y_u, u \leq s) - D) ds - \int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s > 0\}} f'(Y_s) dL_s. \end{aligned}$$

Or, sur $\{Y_s > Z_s\}$, Y_s est strictement positif puisque Z_s est positif ou nul, aussi a-t'on $V(Y_u, u \leq s) \leq D$ et donc $f(Y_t - Z_t) \leq 0$ presque sûrement. Grâce à la définition de f, on conclut que $Y_t \leq Z_t$ presque sûrement. QED

On montre maintenant que les trajectoires de la solution de l'équation (1) convergent presque sûrement.

preuve du théorème: Comme la solution Z est presque sûrement bornée, d'après la Proposition 2, la dérive de l'EDS change de signe une infinité de fois (dans le cas contraire la solution de l'E.D.S. serait comparable à un mouvement brownien dont les trajectoires ne sont pas bornées presque sûrement). Pour $\eta > 0$, on définit la suite de temps d'arrêt finis p.s.:

$$T_0 = 0 \quad T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n + \eta \ t.q.\ \Delta_t = 0\}$$

où Δ_t est la dérive de l'équation (1). On note que $\Delta_{T_n}(x)$ est une fonction décroissante qui vérifie $\Delta_{T_n}(Z_{T_n}) = 0$. En effet, comme Φ est une fonction croissante, on a

$$-\int_0^{T_n} \Phi(x - Z_s) ds \geq -\int_0^{T_n} \Phi(y - Z_s) ds, \text{ pour } x \leq y.$$

On pose alors, pour $\varepsilon > 0$,

$$A_n(\varepsilon, \eta) = \{\forall t \in [T_n, T_n + \eta], |Z_t - Z_{T_n}| \leq \varepsilon\}$$

Ainsi, par le Lemme 1 et un principe de comparaison, on obtient : il existe $p > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_n | Z_{T_n}, \mu_{T_n}) \geq p > 0$$

ce qui implique $\limsup_n 1_{A_n} = 1$ p.s., en particulier $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = 1$. Par ailleurs, sur l'événement $|Z_t - Z_{T_n}| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [T_n, T_n + \eta]$, on a, conditionnellement à $Z_{T_n+\eta}, \mu_{T_n+\eta}$,

$$P(\varepsilon, \eta) := \mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} Z_t - \liminf_{t\to\infty} Z_t > 6\varepsilon \,\middle|\, Z_{T_n+\eta}, \mu_{T_n+\eta} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} Z_t - Z_{\tau_+} > \varepsilon \,\middle|\, Z_{T_n+\eta}, \mu_{T_n+\eta}\right)\\
&\qquad +\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to\infty} Z_t - Z_{\tau_-} < -\varepsilon \,\middle|\, Z_{T_n+\eta}, \mu_{T_n+\eta}\right)\\
&\leq \quad 2\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} Z_t - Z_{\tau_+} > \varepsilon \,\middle|\, Z_{T_n+\eta}, \mu_{T_n+\eta}\right)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tau_+ &= \inf\{t \geq T_n + \eta : Z_t = Z_{T_n} + 2\varepsilon\}\\
\tau_- &= \inf\{t \geq T_n + \eta : Z_t = Z_{T_n} - 2\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Or, pour $t \geq \tau_+$, la dérive de $R_{t-\tau_+} = Z_t - Z_{\tau_+}$ vaut

$$-\int_0^{t-\tau_+} \Phi(x - R_s)ds - \Delta_{\tau_+}(x) \quad \text{avec } \Delta_{\tau_+}(x) \geq \Phi(\varepsilon)\eta \text{ pour } x \geq 0.$$

Ainsi, d'après la Proposition 2 b) :

$$P(\varepsilon,\eta) \leq 2\varphi_\varepsilon(\Phi(\varepsilon)\eta)$$

Par ailleurs, en définissant la suite d'événement deux à deux disjoints $A'_n = A_n - \cup_{i<n} A_i$, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} Z_t - \liminf_{t\to\infty} Z_t > 6\varepsilon\right)\\
= \quad &\sum_n \mathbb{P}\left(\left\{\limsup_{t\to\infty} Z_t - \liminf_{t\to\infty} Z_t > 7\varepsilon\right\} \cap A'_n\right)\\
\leq \quad &2\varphi_\varepsilon(\Phi(\varepsilon)\eta) \sum_n \mathbb{P}(A'_n) \leq 2\varphi_\varepsilon(\Phi(\varepsilon)\eta)
\end{aligned}$$

Le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $\eta \to \infty$, ce qui implique le théorème. QED

2.2 Cas d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

On considère maintenant le cas d'une fonction impaire, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(0_+) \in]0, +\infty[$.
On suppose de plus :
(H) il existe $\alpha > 0$ tel que $x \longmapsto x\Phi^{2+\alpha}(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to\infty} x\Phi^{2+\alpha}(x) = +\infty$.
Comme la fonction Φ est bornée, il existe une unique solution faible à l'E.D.S.

$$\left\{\begin{array}{l} dY_t = dB_t - \displaystyle\int_0^t \Phi(Y_t - Y_s)ds\, dt \\ Y_0 = 0 \end{array}\right. \tag{2.11}$$

où B est un mouvement Brownien unidimensionnel. On étudie alors le comportement asymptotique des trajectoires de cette solution. On montre que les trajectoires sont presque sûrement bornées.

Proposition 4 $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |Y_t| < \infty$, $\mathbb{P}^{(V)}$ *p.s.*

Preuve : La preuve de cette proposition repose essentiellement sur les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration de la Proposition 2.
Soit la suite $L_0 = 0$, $L_n = L_{n-1} + l_n$ où $l_n = R/n^{1+\alpha/2}$ avec $R > 0$. Comme la série des $(l_n)_{n \geq 1}$ converge, on peut noter L_∞ sa limite. On remarque que $\lim_{R \to \infty} L_\infty = +\infty$.
On définit également une autre suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$t_n = \exp\left(\frac{n\Phi(2L_\infty)}{4\Phi(0_+)}\right).$$

Par ailleurs on note, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$S_a = \inf\{t > 0, Y_t = a\} \ ; \ \ T_a = \inf\{t > 0, |Y_t| = a\},$$

et on définit la suite $\tau_0 = 0$ et $\tau_n = T_{L_n}$. Pour montrer que les trajectoires de Y sont presque sûrement majorées, il suffit de considérer l'événement

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} \{\tau_{n+1} - \tau_n > t_{n+1} - t_n \ \text{ ou } \tau_n = \infty\}.$$

On dispose alors de l'inclusion

$$\{\sup |Y_t| < L_\infty\} \supseteq A.$$

Par ailleurs, par le Lemme 1, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^c) &\leq \mathbb{P}(\tau_1 \leq 1) \\ &+ \sum_1^\infty \mathbb{E}\left[\prod_0^{n-1} \mathbb{1}_{\{\infty > \tau_{j+1} - \tau_j > t_{j+1} - t_j\}} \mathbb{P}^{(V_n)}(T_{L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n)\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

où

$$V_n(x) = \int \Phi(x + Y_{\tau_n} - y) \mu_{\tau_n}(dy).$$

Or,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^{(V_n)}(T_{L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n) \\ &\leq \mathbb{P}^{(V_n)}(S_{L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n) + \mathbb{P}^{(V_n)}(S_{-L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n) \end{aligned}$$

et de plus, comme Φ est une fonction impaire, pour calculer

$$\mathbb{P}^{(V_n)}(S_{L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n | \ Y_{\tau_n} = L_n),$$

$$\mathbb{P}^{(V_n)}(S_{L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n | \ Y_{\tau_n} = -L_n),$$

$$\mathbb{P}^{(V_n)}(S_{-L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n | \ Y_{\tau_n} = L_n),$$

et

$$\mathbb{P}^{(V_n)}(S_{-L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n | \, Y_{\tau_n} = -L_n),$$

il suffit de calculer une seule de ces expressions, les autres se calculant de la même manière, en remarquant que pour passer de $-L_n$ à L_{n+1} on doit passer par L_n. Il suffit donc d'estimer la première expression.
Or, conditionnellement à $\{Y_{\tau_n} = L_n\}$, pour n assez grand et pour $x \geq 0$,

$$V_n(x) = \int \Phi(x + L_n - y)\mu_{\tau_n}(dy).$$

Comme Φ est une fonction décroissante, on obtient sur l'intervalle $[\tau_n, S_{L_{n+1}}]$, pour $x \geq 0$,

$$\tilde{V}_n(x) \geq t_n \Phi(2L_\infty),$$

ce qui entraîne que l'opposé de la dérive est minoré par

$$D_n := t_n\Phi(2L_\infty) - (t_{n+1} - t_n)\Phi(0_+),$$

sur l'intervalle $[\tau_n, S_{L_{n+1}} \wedge (\tau_n + t_{n+1} - t_n)]$.
En utilisant la définition de t_n, on trouve que, pour R assez grand,

$$t_{n+1} - t_n \leq \frac{\Phi(2L_\infty)}{2\Phi(0_+)} t_n.$$

Ainsi, pour R assez grand, $D_n \geq t_n\Phi(2L_\infty)/2$. En utilisant la Proposition 3 et l'inégalité (2.10), on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}^{(V_n)}(T_{L_{n+1}} < t_{n+1} - t_n) \leq C(D_n^2 + 1)(t_{n+1} - t_n)e^{-2D_n l_{n+1}}.$$

Or, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} l_{n+1}D_n &\geq \frac{R\, t_n \Phi(2L_\infty)}{2(n+1)^{1+\alpha/2}} \\ &\geq \frac{R\,\Phi^{2+\alpha}(2L_\infty)}{2(n+1)^{1+\alpha/2}} \times \frac{1}{\Phi^{1+\alpha}(2L_\infty)} \exp\left(\frac{n\Phi(2L_\infty)}{4\Phi(0_+)}\right) \\ &\geq CR\,\Phi^{2+\alpha}(2L_\infty)\frac{n^{1+\alpha}}{(n+1)^{1+\alpha/2}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} l_{n+1}D_n = +\infty$ ce qui implique la convergence de la série dans l'équation (2.12). De plus, grâce à l'inégalité précédente, on obtient par convergence monotone, $\lim_{R\to\infty} \mathbb{P}(A^c) = 0$, ce qui implique la bornitude presque sûre des trajectoires de l'équation (2.11). QED

Remarque 2 *Il existe des fonctions Φ qui ne vérifient pas (H) et pour lesquelles la solution de l'EDS associée admet des trajectoires convergentes avec une probabilité strictement positive.*

En effet, si on considère la fonction $\Phi(x) = \mathrm{sgn}(x)$, alors pour tout $a \in]0,1[$ il existe $M > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |Y_t| \leq M) \geq a.$$

On remarque alors que, sur cet événement, les trajectoires sont convergentes presque sûrement et, par ailleurs, ce sont les trajectoires de la solution $\tilde{Y}$ de l'E.D.S associée à la fonction $\tilde{\Phi}(x) = \mathrm{sgn}(x)\mathbb{1}_{\{|x|\leq M\}}(x)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\tilde{Y}_t| \leq M) \geq a,$$

et

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}_t \text{ converge lorsque } \ t \to \infty) \geq a.$$

Remarque 3 $\mathbb{P}^{(V)}$ *la loi de Y, où Y est solution de l'EDS*

$$\begin{cases} dY_t = dW_t - \left(\int_0^t \Phi(Y_t - Y_s)ds + V(Y_t)\right) dt \\ Y_0 = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

avec V une fonction positive en dehors d'un voisinage de l'origine et W un mouvement Brownien unidimensionnel, si $V(x) \geq \eta > 0$ pour $x \geq \varepsilon/4$ et $V(x) \leq -\eta$ pour $x \leq -\varepsilon/4$ alors

$$\mathbb{P}^{(V)}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} Y_t - \inf_{t\in\mathbb{R}_+} Y_t > \varepsilon\right) \leq \varphi_\varepsilon(\eta)$$

où $\lim_{\eta\to\infty} \varphi_\varepsilon(\eta) = 0$.

Mais cette remarque ne suffit pas pour obtenir la convergence presque sûre des trajectoires comme dans le Théorème 1, car dans le cas d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^t \Phi(x - f(s))ds$$

n'est pas une fonction monotone en x pour toute fonction continue f sur $[0,t]$. Or cet argument est une des clefs de la preuve du Théorème 1.

Chapitre 3

Si Φ s'annule sur un voisinage de l'origine

Dans cette section, on s'intéresse à la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = B_t - \nu \int_0^t \int_0^s \mathrm{sgn}(X_s - X_u) \mathbb{1}_{\{|X_s - X_u| \geq \alpha\}} du ds, \;\; \nu > 0, \tag{3.1}$$

où B est un mouvement brownien unidimensionnel.
On a vu dans la section précédente que, si $\alpha = 0$, la diffusion a ses trajectoires presque sûrement convergentes. Ici, le comportement des trajectoires est bien entendu complètement différent. On a en particulier le résultat suivant :

Lemme 2 (Cranston-Le Jan)
Soit X la solution de l'E.D.S (3.1). *Alors, presque sûrement, les trajectoires de la solution ne convergent pas.*

Preuve : On considère le temps d'arrêt $T_t = \inf\{s > t \;\; : \;\; |X_s - X_t| = \alpha/2\}$. Pour $s \in [t, T_t]$, le terme de dérive ne dépend que de la position et non du temps, ainsi

$$\int_0^s \Phi(X_s - X_u) du = \nu \mu_t(y \;:\; X_s - y > \alpha) - \nu \mu_t(y \;:\; X_s - y \leq -\alpha)$$

où $\mu_t = \int_0^t \delta_{X_s} ds$.
La dérive est donc continue et bornée par t, ce qui entraîne, même si t est très grand,

$$\mathbb{P}(T_t < \infty) = 1,$$

en appliquant le test de Feller (cf Proposition 5.32 p.350 dans [K-S]). Il s'ensuit donc que, presque sûrement, les trajectoires ne convergent pas. QED

Le but de ce chapitre est de montrer que les trajectoires de la solution de l'E.D.S. restent néanmoins bornées presque sûrement. Pour l'étude qui suit, on choisira $\nu = 1$ et $\alpha = 2$ pour simplifier les notations mais les démonstrations se généralisent pour $\alpha > 0$ et $\nu > 0$.
On commence par énoncer quelques résultats préliminaires.

3.1 Résultats préliminaires

On énonce premièrement un lemme concernant la loi forte des grands nombres, puis on étudie le temps passé en-dessous de l'origine par quelques diffusions particulières.

Lemme 3 *Soit* $(A_i)_{i\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de carré intégrable telle que*

- $\mathbb{E}[A_i] = \alpha_i > 0$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$, *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \infty$,
- $\mathbb{E}[A_i^2] = \beta_i$ $(\beta_i - \alpha_i^2 \geq 0)$ *tel que* $\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i^2) < \infty$,

alors

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \to 1, \quad p.s.$$

Preuve : On considère la variable aléatoire

$$B_n = \frac{A_n - \alpha_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Alors $\mathbb{E}[B_n] = 0$, pour tout $n \geq 1$, et

$$\mathbb{E}[B_n^2] = \frac{\beta_n - \alpha_n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[B_n] = 0$ et $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[B_n^2] < \infty$, on peut appliquer le lemme de Kolmogorov (voir, par exemple, Lemme 2.2.1 p.42 dans [Re]), pour obtenir la convergence presque sûre de la série $\sum_{n\geq 1} B_n$. Puis, en appliquant le théorème de Kronecker (voir Théorème 1.2.2 p.35 dans [Re]), on en déduit

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i - \alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \to 0, \quad p.s.$$

QED

On continue les résultats préliminaires par l'étude du temps passé sous l'origine par la diffusion suivante :

$$X_t = B_t - \int_0^t n\mathbb{1}_{[0,1]}(X_s)ds, \tag{3.2}$$

tuée en τ, temps de sortie de l'intervalle $[-1,a]$, $0 < a \leq 1$.

Proposition 5 *Soit*

$$\Gamma_1(\lambda) := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda \int_0^{\tau} \mathbb{1}_{[0,a]}(X_s)ds\right\} \mathbb{1}_{X_\tau = -1}\right],$$

alors

$$\Gamma_1(\lambda) = \frac{e^{2a\sqrt{n^2+2\lambda}} - 1}{n + \sqrt{n^2+2\lambda} - 1 - (n - \sqrt{n^2+2\lambda} - 1)e^{2a\sqrt{n^2+2\lambda}}}. \tag{3.3}$$

Preuve : Soit la diffusion partant de $x \in [-1,a]$. On note

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ -\lambda \int_0^\tau \mathbb{1}_{[0,a]}(X_s)ds \right\} \mathbb{1}_{X_\tau=-1} \right].$$

Par la formule de Feynman-Kac, u est solution du système suivant, sur l'intervalle $[-1,a]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}u'' - n\mathbb{1}_{[0,a]}u' - \lambda\mathbb{1}_{[0,a]}u = 0, \\ u(-1) = 1 \quad \text{et} \quad u(a) = 0. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Ainsi

$$u(x) = Ax + A + 1, \;\text{ avec }\; A \in \mathbb{R}, \;\text{ sur }\; [-1,0],$$
$$u(x) = \alpha e^{(n+\sqrt{n^2+2\lambda})x} + \beta e^{(n-\sqrt{n^2+2\lambda})x}, \;\; \alpha \in \mathbb{R}, \;\; \beta \in \mathbb{R}, \;\text{ sur }\; [0,a].$$

Comme $u(a) = 0$, on a l'égalité $\beta = -\alpha \exp(2a\sqrt{n^2+2\lambda})$, et donc, sur $[0,a]$,

$$u(x) = \alpha(e^{(n+\sqrt{n^2+2\lambda})x} - e^{2a\sqrt{n^2+2\lambda}+(n-\sqrt{n^2+2\lambda})x}).$$

Par ailleurs, puisque $u(0_-) = u(0_+)$ et $u'(0_-) = u'(0_+)$, on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} A + 1 = \alpha(1 - e^{2a\sqrt{n^2+2\lambda}}), \\ A = \alpha(n + \sqrt{n^2+2\lambda}) - \alpha(n - \sqrt{n^2+2\lambda})e^{2a\sqrt{n^2+2\lambda}}. \end{array} \right.$$

Par la résolution de ce système d'équations, on trouve

$$\alpha \left(n + \sqrt{n^2+2\lambda} - 1 - (n - \sqrt{n^2+2\lambda} - 1)e^{2a\sqrt{n^2+2\lambda}} \right) = -1. \tag{3.5}$$

Le résultat de la Proposition 5 est alors une conséquence immédiate de (3.5) et du fait que $u(0) = \alpha(1 - \exp(2a\sqrt{n^2+2\lambda}))$. QED

On suppose maintenant que a dépend de n, on le note alors a_n et on étudie le comportement asymptotique du temps passé sous l'origine par la diffusion (3.2) lorsque n tend vers l'infini.

Corollaire 1 *Si $a_n \sim \frac{1}{n^\gamma}$ avec $\gamma \in [0,1[$ lorsque n tend vers l'infini, alors*

$$\Gamma_2 := \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathbb{1}_{[0,a_n]}(X_s)ds\mathbb{1}_{X_\tau=-1} \right] \sim \frac{1}{n}. \tag{3.6}$$

On remarque que le premier terme du développement limité à l'infini ne dépend pas de γ ce qui peut sembler surprenant. En fait, asymptotiquement la diffusion passe essentiellement son temps dans les positions négatives ainsi que dans un voisinage très petit de l'origine.

Preuve : La preuve de ce résultat est immédiate : il suffit de dériver l'expression (3.3) par rapport à λ et de prendre la valeur à l'origine. Ce qui donne

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{n}\frac{2ae^{2an}(2n-1+e^{2an}) - (e^{2an}-1)(1+e^{2an}+2ae^{2an})}{((2n-1)+e^{2an})^2}.$$

On en déduit alors (3.6). QED

Proposition 6 *Soit la diffusion*

$$X_t = B_t - n \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \geq 0\}} ds,$$

et soit $\tau = \inf\{t > 0,\ X_t = -1\}$ *alors*

$$\mathbb{E}\left[\exp -\lambda \int_0^\tau \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(X_s) ds\right] = \frac{1}{1+\sqrt{n^2+2\lambda}-n}. \tag{3.7}$$

La preuve de cette proposition est identique à celle de la Proposition 5. Il suffit de définir le système (3.4) sur $[-1, +\infty)$ et de remplacer les conditions aux bords par $u(-1) = 1$ et $u(\infty) = 0$.

Corollaire 2

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(X_s) ds\right] &= \frac{1}{n} \\ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(X_s) ds\right)^2\right] &= \frac{2n+1}{n^3} \end{aligned} \tag{3.8}$$

La preuve de ce résultat est immédiate. Ceci termine les quelques résultats préliminaires qui sont indispensables à la preuve de la bornitude des trajectoires de l'équation (3.1).

3.2 Bornitude des trajectoires

On considère la solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$X_t = B_t - \int_0^t \int_0^s \operatorname{sgn}(X_s - X_u) \mathbb{1}_{\{|X_s - X_u| \geq 2\}} du ds, \ \ t \geq 0. \tag{3.9}$$

Pour la suite, on note

$$\Phi(x) = \operatorname{sgn}(x) \mathbb{1}_{\{|x| \geq 2\}}. \tag{3.10}$$

Théorème 2 *Les trajectoires de l'unique solution faible de l'équation* (3.9) *sont presque sûrement bornées.*

On s'attachera à démontrer dans le preuve que les trajectoires sont presque sûrement majorées. Il est alors facile d'obtenir le résultat du théorème par symétrie.

Preuve : (Dans toute cette preuve, les C_i désignent des constantes). Soit $\tau_n = \inf\{t \geq 0,\ X_t = n\}$, $n \geq 4$. On se place sur l'événement $\Omega_n = \{\tau_n < \infty\}$ et on suppose que $\mathbb{P}(\Omega_n) > 0$ (dans le cas contraire, la majoration des trajectoires de X est évidente). On montrera alors qu'avec une probabilité strictement positive, indépendante de n, on n'atteint pas le niveau $n+2$. Ceci suffit pour démontrer la bornitude presque sûre des trajectoires. En effet, la probabilité de ne pas rester bornée est

$$\prod_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tau_{2n+2} < \infty | \tau_{2n} < \infty) = 0,$$

puisque $\mathbb{P}(\tau_{2n+2} < \infty | \tau_{2n} < \infty) \leq C_0 < 1$, uniformément en n.
Tout d'abord on définit une suite $u_0 = 0$, $u_k = C_1 \times \{k(\log(k+1))^2\}^{-1}$ de telle sorte que

$$\sum_{k\geq 1} u_k = 1,$$

et deux suites de temps d'atteinte $(S_k^{\pm})_{k\geq 0}$ et $(T_k)_{k\geq 0}$ définies par :

$$S_0^{\pm} = \tau_n = T_0 \tag{3.11}$$

$$S_k^{-} = \inf\left\{t > 0, X_{t+U_{k-1}} = n - 1 + \sum_{j=0}^{k-1} u_j\right\}, \quad k \geq 1, \tag{3.12}$$

$$S_k^{+} = \inf\left\{t > 0, X_{t+U_{k-1}} = n + 1 + \sum_{j=0}^{k-1} u_j\right\}, \quad k \geq 1, \tag{3.13}$$

$$T_k = \inf\left\{t > 0, X_{t+W_k} = n + \sum_{j=0}^{k} u_j\right\}, \quad k \geq 1, \tag{3.14}$$

où

$$U_k = \sum_{j=0}^{k} S_j^{-} + \sum_{j=1}^{k} T_j \quad \text{et} \quad W_k = \sum_{j=0}^{k} S_j^{-} + \sum_{j=1}^{k-1} T_j. \tag{3.15}$$

(on prendra par convention $\inf \emptyset = +\infty$). Pour prouver que les trajectoires n'atteignent

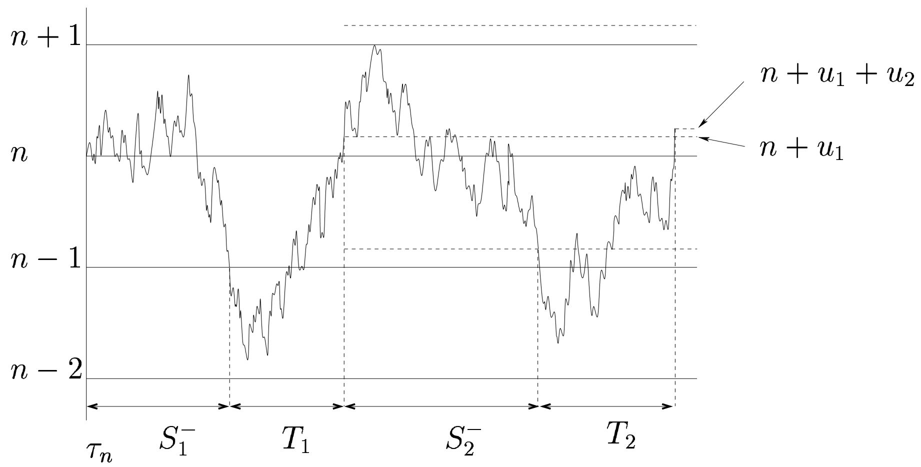

FIG. 3.1 – *définition des temps d'atteinte*

pas le niveau $n+2$ avec une probabilité strictement positive, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) > 0, \tag{3.16}$$

où

$$E_k = \{\omega \in \Omega_n \;\; t.q. \; S_j^{-} < S_j^{+}, \, 1 \leq j \leq k, \text{ et } T_i < \infty, \, 1 \leq i \leq k-1\}. \tag{3.17}$$

En effet, l'ensemble des trajectoires vérifiant $T_k = \infty$ sachant $S_k^- < \infty$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, sont majorées : on peut donc bel et bien introduire la condition des temps d'atteintes finis dans la définition des E_k. La démonstration de (3.16) va se faire en plusieurs étapes.

étape 1: On considère de manière générale un temps d'arrêt T et on définit $Y_t = X_{t+T} - X_T$. Ainsi, on obtient, par (3.9) et (3.10),

$$\begin{aligned}
Y_t &= B_{t+T} - B_T - \int_T^{T+t} ds \int_0^s \Phi(X_s - X_u)du \\
&= B_{t+T} - B_T - \int_0^t ds \int_0^s \Phi(X_{s+T} - X_{u+T})du \\
&\quad - \int_0^t ds \int_0^T \Phi(X_{s+T} - X_u)du \\
&= \tilde{B}_t - \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \Phi(Y_s + X_T - y)\mu_T(dy) + \int_0^t ds \int_0^s \Phi(Y_s - Y_u)du,
\end{aligned}$$

où $\tilde{B}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$ ($\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s,\ s \leq t\}$) et $\mu_t = \int_0^t \delta_{X_s} ds$.

Si on note $Y_t^{(k)} = X_{t+U_{k-1}} - X_{U_{k-1}}$, alors, sur l'intervalle $[0, S_k^- \wedge S_k^+]$, on a

$$Y_t^{(k)} = \tilde{B}_t - \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(Y_s^{(k)} + n + \sum_{j=0}^{k-1} u_j - y \right) \mu_{U_{k-1}}(dy) \right) ds. \tag{3.18}$$

En effet, $|Y_s^{(k)} - Y_u^{(k)}| \leq 2$ pour $0 \leq u,s \leq S_k^- \wedge S_k^+$. On remarque donc que , conditionnellement à $\mathcal{F}_{U_{k-1}}$, $Y^{(k)}$ est une diffusion dont la dérive, à l'instant t, ne dépend que de la position de $Y_t^{(k)}$. On cherchera par la suite à estimer plus précisément cette dérive, afin de calculer la probabilité suivante : $\mathbb{P}(S_k^- < S_k^+ | E_{k-1})$.

On peut définir une E.D.S. identique à (3.18) en définissant $Z_t^{(k)} = X_{t+W_k} - X_{W_k}$ sur l'intervalle $[0, T_k]$. Ainsi, on obtient

$$Z_t^{(k)} = \tilde{B}_t - \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(Z_s^{(k)} + n - 1 + \sum_{j=0}^{k-1} u_j - y \right) \mu_{W_k}(dy) \right) ds. \tag{3.19}$$

Le reste de la démonstration du théorème se concentre sur la preuve de l'inégalité (3.16). Le but est de trouver une majoration de la probabilité $\mathbb{P}(S_k^- > S_k^+ | \mathcal{G}_{k-1})$ (étape 4). Pour ce faire on va comparer la diffusion $Y^{(\cdot)}$ avec une autre diffusion plus simple. Cet argument repose sur un principe de comparaison (voir par exemple Théorème 1.1 chapitre 6 dans [I-W]). C'est pourquoi on sera amené à trouver une majoration de la dérive de $Y^{(\cdot)}$. Comme $Y^{(\cdot)}$ et $Z^{(\cdot)}$ sont fortement liés, il suffit de comparer $Z^{(\cdot)}$ avec une diffusion plus simple, en d'autres termes il suffit de trouver une majoration de la dérive de $Z^{(\cdot)}$ (étape 3). Or cette dérive dépend du temps d'occupation de $Y^{(\cdot)}$, c'est pourquoi, dans l'étape qui suit, sont présentés quelques résultats concernant $Y^{(\cdot)}$.

étape 2 : Soit $0 < \gamma < 1$. On cherche tout d'abord à calculer la probabilité suivante :

$$\mathcal{A}_m := \mathbb{P}\left(\int_0^{S_m^-} \mathbb{1}_{\{Y_s^{(m)} \geq 1 - \sum_{j=l}^{m-1} u_j\}} ds \geq m^\gamma \middle| E_m \right),$$

où $1 \leq l \leq m$. Par l'inégalité de Markov, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\mathcal{A}_m \leq \frac{1}{m^{\gamma N}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{S_m^-} \mathbb{1}_{\{Y_s^{(m)} \geq 1 - \sum_{j=l}^{m-1} u_j\}} ds \right)^N \middle| E_m \right].$$

Par la formule (3.18), comme la dérive de $Y^{(m)}$ est négative pour tout $t \in [0, S_m^- \wedge S_m^+]$, on a, par comparaison (Théorème 1.1 chapitre 6 dans [I-W]), $Y_t^{(m)} \geq \tilde{B}_t$ *p.s.* ce qui entraîne $\mathbb{P}(S_m^- < S_m^+) \geq 1/2$.
Ainsi

$$\mathcal{A}_m \leq \frac{2}{m^{\gamma N}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{S_m^-} \mathbb{1}_{\{Y_s^{(m)} \geq 1 - \sum_{j=l}^{m-1} u_j\}} ds \right)^N \middle| E_m \right].$$

On compare $Y^{(m)}$ avec la diffusion $\bar{Y}$ définie par l'E.D.S.

$$\bar{Y}_t = \tilde{B}_t - \tau_1 t.$$

On rappelle que τ_1 est le temps d'atteinte par X du niveau 1, indépendant de $\tilde{B}$, et on définit $R_{-1} = \inf\{t > 0,\ \bar{Y}_t = -1\}$. On obtient alors

$$\mathcal{A}_m \leq \frac{2}{m^{\gamma N}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{R_{-1}} \mathbb{1}_{\{\bar{Y}_s \geq 0\}} ds \right)^N \right] \leq \mathbb{E}[R_{-1}^N].$$

Comme la loi de τ_1 et celle de R_{-1} sont connues (voir, par exemple, dans [B-S] les formules 2.0.2 p.163 et 2.0.2 p.223), on obtient

$$\mathcal{A}_m \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{N-3/2} y^{-3/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2y} - \frac{(yx-1)^2}{2x} \right\} dx\, dy.$$

Ainsi, il existe une constante $K_N > 0$, telle que, pour tout $N \geq 1$,

$$\mathcal{A}_m \leq \frac{K_N}{m^{\gamma N}}. \tag{3.20}$$

Par ailleurs, on définit l'événement F_k par :

$$F_k = \bigcap_{m=k-\lfloor k^\gamma \rfloor}^{k} G_m^k,$$

avec

$$G_m^k = \left\{ \int_0^{S_m^-} \mathbb{1}_{\left\{Y_s^{(m)} \geq 1 - \sum_{j=k-\lfloor k^\gamma \rfloor - 1}^{m-1} u_j\right\}} ds < m^\gamma \middle| E_{m-1} \cap \{T_{m-1} < \infty\} \right\}.$$

Ainsi, d'après (3.20),

$$\mathbb{P}(F_k^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=k-\lfloor k^\gamma \rfloor}^{k} (G_m^k)^c \right) \leq \sum_{m=k-\lfloor k^\gamma \rfloor}^{k} \frac{K_N}{m^{\gamma N}}.$$

Or, comme $\displaystyle\sum_{m=k-\lfloor k^\gamma\rfloor}^{k} \frac{K_N}{m^{\gamma N}} \sim \frac{C_2}{(k-\lfloor k^\gamma\rfloor)^{\gamma N-1}}$ lorsque k tend vers l'infini, on a, pour N assez grand,

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(F_k^c) < \infty.$$

Ainsi, par le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit qu'il existe une variable aléatoire $N_1(\omega) \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \geq N_1(\omega)$, $\omega \in F_k$ *p.s.* et donc $\omega \in G_m^k$ *p.s.* pour $k - \lfloor k^\gamma\rfloor \leq m \leq k$.

étape 3 : Grâce à ces calculs, on est en mesure de trouver une majoration de la dérive des diffusions $Z^{(k)}$ pour $k \geq N_1(\omega)$. En effet, d'après (3.19), sur l'intervalle $[0,T_k]$, la dérive est égale à

$$b_k(x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(x+n-1+\sum_{j=1}^{k-1} u_j - y\right)\mu_{W_k}(dy) \quad \text{pour} \quad x\in[-1,1+u_k].$$

Ainsi, conditionnellement à $E_k \cap \{T_k < \infty\}$, on obtient les majorations suivantes:

$$\begin{cases} b_k(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad x\geq 0, \\ b_k(x) \leq \displaystyle\int_0^{S_k^-} \mathbb{1}_{\{Y_s^{(k)}\geq 1-u_{k-1}\}} ds \quad \text{sur} \quad [-u_{k-1},0[, \\ b_k(x) \leq \displaystyle\int_0^{S_{k-1}^-} \mathbb{1}_{\{Y_s^{k-1}\geq 1-u_{k-2}\}} ds + \int_0^{S_k^-} \mathbb{1}_{\{Y_s^{(k)}\geq 1-u_{k-1}-u_{k-2}\}} ds \\ \text{sur} \quad [-u_{k-1}-u_{k-2},-u_{k-1}[, \\ \vdots \end{cases}$$

Ainsi, grâce aux calculs effectués jusqu'ici dans l'étape 2, on a, pour $k \geq N_1(\omega)$,

$$\begin{cases} b_k(x) \leq k^\gamma \quad \text{sur} \quad [-u_{k-1},0[, \\ b_k(x) \leq k^\gamma + (k-1)^\gamma \quad \text{sur} \quad [-u_{k-1}-u_{k-2},-u_{k-1}[, \\ \vdots \\ b_k(x) \leq k^\gamma + (k-1)^\gamma + \cdots + (k-\lfloor k^\gamma\rfloor)^\gamma \\ \text{sur} \quad \left[-\displaystyle\sum_{j=k-\lfloor k^\gamma\rfloor-1}^{k-1} u_j, -\sum_{j=k-\lfloor k^\gamma\rfloor}^{k-1} u_j\right]. \end{cases}$$

Pour la suite, on note

$$\xi_k = \sum_{j=k-\lfloor k^\gamma\rfloor-1}^{k-1} u_j. \tag{3.21}$$

On remarque, grâce à la définition des u_j ($u_j = C_1/(j(\log(j+1))^2)^{-1}$), que

$$\begin{aligned} \xi_k &\geq C_1 \int_{k-\lfloor k^\gamma\rfloor-1}^{k-2} \frac{dx}{x(\log x)^2} = C_1 \int_{\log(k-\lfloor k^\gamma\rfloor-1)}^{\log(k-2)} \frac{du}{u^2} \\ &\geq C_1\left(\frac{1}{\log(k-\lfloor k^\gamma\rfloor-1)} - \frac{1}{\log(k-2)}\right) \geq C_3\kappa_k, \end{aligned}$$

où

$$\kappa_k \sim \frac{1}{k^{1-\gamma}(\log k)^2} \quad \text{quand} \quad k \to \infty. \tag{3.22}$$

Ainsi, sur l'intervalle $[-\xi_k,0]$ la dérive de la diffusion $Z^{(k)}$ est majorée par

$$b_k(x) \leq (k^\gamma + 1)^2. \tag{3.23}$$

En utilisant la majoration (3.23) de la dérive de $Z^{(k)}$, on peut alors minorer le temps passé sous l'origine par cette même diffusion. Conditionnellement à $E_k \cap \{T_k < \infty\}$ et en utilisant un principe de comparaison (Théorème 1.1 chapitre 6 dans [I-W]), on a

$$\int_0^{T_k} \mathbb{1}_{[-1,0]}(Z_s^{(k)})ds \geq \int_0^{R_1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(\bar{Z}_s^{(k)})ds =: A_k,$$

où

$$\bar{Z}_t^{(k)} = \tilde{B}_t + \int_0^t \left((k^\gamma+1)^2 \mathbb{1}_{[-\xi_k,0]}(\bar{Z}_s^{(k)}) + (W_k + s)\mathbb{1}_{(-\infty,-\xi_k[}(\bar{Z}_s^{(k)})\right) ds.$$

On rappelle que ξ_k est défini par (3.21), W_k par (3.15). De plus, on définit $R_a = \inf\{t > 0,\ \bar{Z}_t^{(k)} = a\},\ \ a \in \mathbb{R}$.
On en déduit alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A_k] &\geq \mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(\bar{Z}_s^{(k)})ds \mathbb{1}_{\{\bar{Z}_s^{(k)} \geq -\xi_k,\ \forall s \in [0,R_1]\}}\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(\bar{Z}_s^{(k)})ds \mathbb{1}_{\{R_1 < R_{-\xi_k}\}}\right].
\end{aligned}$$

On applique alors une version adaptée du Corollaire 1 (cas symétrique, n remplaçé par $k^{2\gamma}$). Comme $\xi_k \geq \dfrac{C_4}{k^{1-\gamma_0}}$, pour tout $\gamma_0 < \gamma$, i.e. comme $\xi_k \geq C_4 \left(\dfrac{1}{k^{2\gamma}}\right)^{1-\gamma_0-2\gamma}$, on obtient, pour $\gamma > 1/3$,

$$\mathbb{E}[A_k] \geq \alpha_k \quad \text{où} \quad \alpha_k \sim \frac{1}{k^{2\gamma}} \quad \text{au voisinage de l'infini.} \tag{3.24}$$

Enfin

$$\mathbb{E}[(A_k)^2] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{R_1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(\tilde{Z}_s^{(k)})ds\right)^2\right],$$

où la diffusion $\tilde{Z}_t^{(k)}$ est définie par

$$\tilde{Z}_s^{(k)} = \tilde{B}_t + \int_0^t (k^\gamma+1)^2 \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(\tilde{Z}_s^{(k)})ds.$$

En utilisant le Corollaire 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}[(A_k)^2] \leq \frac{2(k^\gamma+1)^2+1}{(k^\gamma+1)^6}, \tag{3.25}$$

ce qui implique, en particulier,

$$E[A_k] \leq \frac{C_5}{k^{2\gamma}}.$$

En utilisant (3.24) et (3.25) et en appliquant le Lemme 3, on a, pour $\gamma < 1/2$,

$$\sum_{j=1}^{k} A_j \sim \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{i^{2\gamma}} \sim \frac{k^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} \text{ p.s. lorsque } k \to \infty.$$

Etape 4: Dans cette dernière étape, on détermine $\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq 1} E_k)$, où E_k est défini par (3.17). Pour ce faire, on choisit $k \geq N_1(\omega)+1$ et on majore la dérive d_k de la diffusion $Y^{(k)}$. On rappelle que dans le calcul de la dérive de $Y^{(k)}$, il n'y a aucune contribution du temps passé par la diffusion X dans l'intervalle $[x-1,x+1]$ puisque $\Phi(x) = \operatorname{sgn}(x)\mathbb{1}_{\{|x|\geq 2\}}$. Ainsi, grâce à l'équation (3.18), on a

$$d_k(x) \leq -\sum_{j=1}^{m} \int_0^{T_j} \mathbb{1}_{[-1,0]}(Z_s^{(j)})ds, \text{ pour } 1 - \sum_{j=m-1}^{k-1} u_j \leq x \leq 1 - \sum_{j=m}^{k-1} u_j.$$

Or, d'après l'étape 2, pour $m \geq N_1(\omega)$,

$$d_k(x) \leq -\sum_{j=N_1(\omega)}^{m} A_j =: -\beta_m \sim -\frac{m^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} \; p.s. \tag{3.26}$$

lorsque m et k tendent vers l'infini. Ainsi, par un principe de comparaison (Théorème 1.1 chapitre 6 dans [I-W]), on obtient

$$\mathbb{P}(S_k^+ \leq S_k^- | E_{k-1} \cap \{k \geq N_1 + 1\}) \leq \frac{s_k(0) - s_k(-1)}{s_k(1) - s_k(-1)}, \tag{3.27}$$

s_k désignant la fonction d'échelle de la diffusion $\bar{Y}^{(k)}$, définie par l'E.D.S. suivante

$$\bar{Y}_t^{(k)} = \tilde{B}_t - \int_0^t \bar{d}_k(\bar{Y}_s^{(k)})ds,$$

avec

$$\begin{cases} \bar{d}_k(x) = 0 \text{ sur } \left[-1,1 - \sum_{j=N_1(\omega)}^{k-1} u_j\right], \\ \bar{d}_k(x) = -\beta_m \text{ sur } \left[1 - \sum_{j=m-1}^{k-1} u_j, 1 - \sum_{j=m}^{k-1} u_j\right], \; m \geq N_1(\omega) + 1. \end{cases}$$

On calcule alors la fonction d'échelle:

$$s_k(x) = \int_0^x \left(\exp -2\int_0^\xi \bar{d}_k(y)dy\right) d\xi,$$

ainsi, $s_k(x) = x$ pour $x \leq 0$ et

$$s_k(1) \geq \frac{C_1}{k(\log(k+1))^2} \exp 2 \sum_{j=N_1}^{k-1} \frac{\beta_j}{j(\log(j+1))^2}.$$

On remarque que $\displaystyle\sum_{j=N_1}^{k-1} \frac{\beta_j}{j(\log(j+1))^2}$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini. De plus, pour $\theta > 0$ suffisamment petit, il existe une constante $C_6(\theta)$ telle que

$$s_k(1) \geq \frac{C_6(\theta)}{k(\log(k+1))^2} \exp\left(k^{1-2\gamma-\theta}\right).$$

En utilisant (3.27) et l'égalité $\dfrac{s_k(0) - s_k(-1)}{s_k(1) - s_k(-1)} = \dfrac{1}{s_k(1)+1}$, on en déduit que

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k^+ \leq S_k^- | E_{k-1} \cap \{T_{k-1} < \infty\}) < \infty,$$

et que la série est majorée par une constante qui ne dépend pas de n, ce qui entraîne qu'il existe pour $n \geq 4$ une constante $\varepsilon \in]0,1]$ indépendante de n telle que $\mathbb{P}(\bigcap_{k \geq 1} E_k) \geq \varepsilon$. En partant du niveau $2n$, on n'atteint pas le niveau $2n+2$ avec une probabilité strictement positive indépendante de n, ce qui suffit à démontrer que les trajectoires sont presque sûrement majorées. Par symétrie, on obtient alors aisément la bornitude presque sûre des trajectoires de l'équation (3.9). QED

Proposition 7 *Soit X la solution de l'équation (3.1) alors*

$$\limsup_{t \to \infty} X_t - \liminf_{t \to \infty} X_t \leq 11\alpha \quad p.s. \tag{3.28}$$

Preuve : Pour démontrer cette proposition on étudie la solution de l'E.D.S. suivante :

$$\begin{cases} Y_t = dB_t - \left(\displaystyle\int_0^t \nu \operatorname{sgn}(Y_t - Y_s) \mathbb{1}_{\{|Y_t - Y_s| \geq \alpha\}} ds + V(Y_t)\right) dt \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

où $V(x) \geq \eta > 0$ pour $x \geq 0$. On note $\mathbb{P}^{(V)}$ la loi de Y. Par une démonstration similaire à celle du Théorème 2, on montre qu'il existe une constante C ne dépendant que de α telle que

$$\mathbb{P}^{(V)}\left(\sup_{t \geq 0} Y_t > 5\alpha\right) \leq Ce^{-\eta/2}.$$

On en déduit alors (3.28) par un raisonnement identique à celui exposé dans la preuve du Théorème 1. QED

Références

[B-S] A.N. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion -Facts and Formulae*, Birkhäuser Verlag, (1996).

[C-LJ] M. Cranston et Y. Le Jan, *Self-attracting diffusions : Two case studies*, Math. Ann.,**303** (1995), 87-93.

[G-S] I.Gihman et A.V. Skorohod, *Theory of stochastic processes III*, Springer Verlag, 1979.

[H-R] S. Herrmann et B. Roynette, *Boundedness and convergence of some self-attracting diffusions*, prépublications de l'Institut Élie Cartan, **10**, 2001.

[I-W] N. Ikeda et S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd edition, North-Holland Kodansha, 1989.

[K-S] I. Karatzas et S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer Verlag, 1991.

[P-V] R. Pemantle et S.Volkov, *Vertex-reinforced random walk on* $\mathbb{Z}$ *has finite range*, Ann. Probab., **27** (1999) no.3, pp. 1368-1388.

[Ra] O. Raimond, *Self Attracting Diffusions : Case of the constant interaction*, Probab. Theor. Relat. Fields **107**, (1996), 177-196.

[Re] P. Revesz, *The Laws of Large Numbers*, Probability and Mathematical Statistics, Academic Press New York and London, 1968.

[R-W] L.C.G. Rogers et D. Williams, *Diffusions, Markov processes, and martingales, vol. 2: Ito calculus*, New York: Wiley 1987.

Résumé

La première partie contient l'étude d'un phénomène de grandes déviations. Elle généralise les résultats de Freidlin et Wentzell liés au comportement asymptotique d'une solution d'une équation différentielle stochastique, dont le coefficient de diffusion tend vers zéro. Elle met en valeur l'étude du cas où l'équation différentielle ordinaire associée au problème limite satisfait un phénomène de Peano. Les arguments sont probabilistes (principe de grandes déviations et calcul stochastique) mais également analytiques (solutions de viscosité d'équations de Hamilton-Jacobi).
Dans la seconde partie, on étudie un système de processus autostabilisants qui s'obtient comme limite, par propagation du chaos, d'un système de particules. Ces particules satisfont à une équation différentielle stochastique et sont regroupées en deux familles. Les particules de la même famille s'attirent et les particules de familles différentes se repoussent. On montre alors que le système limite admet une unique solution qui, de plus, se stabilise quand le temps devient grand, c'est-à-dire que la loi de la solution tend vers l'unique mesure stationnaire.
Enfin, la dernière partie se concentre sur l'étude d'une diffusion à mémoire longue inspirée des marches aléatoires renforcées. La dérive de cette diffusion particulière dépend de tout le passé et attire le processus vers l'endroit où il a passé la majeure partie de son temps. Suivant le comportement de la fonction d'interaction au voisinage de l'origine, on montre que la diffusion converge presque sûrement ou, au contraire, qu'elle ne converge pas, tout en restant bornée presque sûrement. Les démonstrations reposent essentiellement sur des principes de comparaisons entre les diffusions.

Mots-clés: équations différentielles stochastiques, grandes déviations, solutions de viscosité, équations de Hamilton-Jacobi, pont brownien, processus autostabilisants, mesure invariante, ultracontractivité, propagation du chaos, inégalité de concentration, diffusion à memoire longue, principe de comparaison

Abstract

The first part contains a study of a large deviation phenomenon. Our approach generalizes the result of Freidlin and Wentzell. Here we emphases the asymptotic behaviour of a solution of a stochastic differential equation which diffusion coefficient tends to zero, and which associated ordinary differential equation satisfies a Peano phenomenon. Proofs are based on probabilistic (large deviations theory) and analytic (viscosity solutions for Hamilton-Jacobi equations) tools.
In the second part, we study a system of self-stabilizing processes. This system is obtained by taking the limit in a system of two kinds of particules. These particules satisfy stochastic differential equations. Moreover, two particules of the same family attract each other and a particule pushes a particule of the other family away. We let the number

of particule tend to infinity and prove that the system admits an unique solution which converges to the stationnary distribution as the time is getting large.
In the last part, we study a stochastic differential equation with long memory. The drift of this diffusion, which depends on all the past, attracts the process to the place where it has spent the most time. We prove then that the behaviour of this process, when the time tends to infinity, depends on the behaviour of the interaction function in the neighbourhood of the origin. In some particular cases the process converges almost surely, in other cases the process does not converge but remains bounded. Proofs are based on comparison results.