C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1019–1024, 2001
Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

Phénomène de Peano et grandes déviations

Samuel HERRMANN

**Institut de mathématiques Élie-Cartan, Université Henri-Poincaré, B.P. 239,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France
Courriel : herrmann@iecn.u-nancy.fr**

(Reçu le 14 décembre 2000, accepté après révision le 4 avril 2001)

Résumé. Considérons $\{X_t^\varepsilon;\ t \geqslant 0\}$ ($\varepsilon > 0$) la solution issue de l'origine d'une équation différentielle stochastique unidimensionnelle, petite perturbation brownienne d'une équation différentielle ordinaire $x_t' = b(x_t)$ qui admet une infinité de solutions. Nous étudions alors le comportement de X^ε lorsque le paramètre ε tend vers zéro. Nous montrons ainsi un principe de grandes déviations fonctionnel sur l'ensemble des fonctions continues qui a la particularité de faire apparaître un comportement à deux vitesses, dépendant du borélien considéré. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Large deviations for Peano phenomenon

Abstract. *Consider* $\{X_t^\varepsilon;\ t \geqslant 0\}$ $(\varepsilon > 0)$, *the solution starting from* 0 *of a stochastic differential equation, which is a small Brownian perturbation of the one-dimensional ordinary differential equation* $x_t' = b(x_t)$. *Our choice of* b *implies that the o.d.e. admits infinitely many solutions. We study the behaviour of the diffusion as* ε *tends to zero. We prove then that* X^ε *verifies a singular large deviations principle: two different rates of convergence appear.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let $0 < T < \infty$, $\{B_t : t \geqslant 0\}$ an one-dimensional Brownian motion, and consider the stochastic differential equation (1) on $[0, T]$. We suppose that b is a continuous function verifying the following assumptions:

(H1) b is a non-decreasing continuous odd function, $b' \in \mathcal{C}(]0, +\infty[)$ and b^{-1} is integrable in a neighbourhood of 0;

(H2) there exists $0 < \gamma < 1$ and $C > 0$ such that $b'(x) \sim C\,\gamma\,|x|^{\gamma-1}$ near the origin.

The dynamical system (2) admits then infinitely many solutions (Peano phenomenon). Bafico and Baldi have proved that P^ε, the law of the process X^ε, converges weakly to $\frac{1}{2}\,\delta_{\rho_1} + \frac{1}{2}\,\delta_{\rho_2}$, where ρ_1 and ρ_2 are the extremal solutions of the dynamical system (2) (*see* [1]). In this Note, we study the rate of convergence. Let us denote by p_t^ε the density of X_t^ε with respect to the Lebesgue measure. We prove that p_t^ε converges exponentially fast to zero, if (t, x) does not belong to the graph of one of the extremal solutions of problem (2). According to the position of the point (t, x), we emphasize two kinds of rate:

Note présentée par Marc YOR.

S0764-4442(01)01983-8/FLA

If the point (t,x) is such that $|x|>K^{-1}(t)$ where $K(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{b(y)}$ and K^{-1} its reciprocal function, there exists a positive function k_t such that:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon^2\log p_t^\varepsilon(x)=-k_t\big(|x|\big).$$

This means that the density has an exponential decay with rate ε^2, as in large deviations theory (when the dynamical system has an unique solution (*see*, for instance, [3–5] or [9]).

If the point (t,x) lies in the domain between the two extremals, that is, if $|x|<K^{-1}(t)$, then the density has an exponential decay with a different rate, namely $\varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}$. Precisely, we get the limit (4) where λ_1 is the first positive eigenvalue of the Schrödinger operator (5). Moreover, this convergence is uniform on all compact subsets of $\{(t,x):0<t\leqslant T,\ 0<|x|<K^{-1}(t)\}$. This result extends the study developed in [6], where the authors considered the stochastic differential equation (1) with the following drift term:

$$b(x)=\mathrm{sgn}(x)|x|^\gamma\quad\text{with } 0<\gamma<1.$$

Furthermore, if b is a bounded increasing function verifying the assumptions (H1) and (H2), then X^ε satisfies a large deviations principle on the set of all continuous functions on $[0,T]$, with speed ε^2 and with good rate function I_T, defined by (3) (*see* [7] for any details). It is obvious that $I_T(\varphi)=0$ for all solution φ of the dynamical system (2). Hence this result doesn't give us any piece of information about the behaviour of the diffusion in a neighbourhood of φ. That's why we study also the probability that the diffusion belongs to a neighboorhood of a non-extremal solution of (2), and, using the behaviour of the density p_t^ε, we obtain the convergence result (6).

---

1. Introduction

Considérons, sur $[0,T]$, l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t^\varepsilon=\varepsilon\,\mathrm{d}B_t+b(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t,\\ X_0^\varepsilon=0,\end{cases}\tag{1}$$

où b est une fonction continue et B est un mouvement brownien unidimensionnel. Nous cherchons à étudier le comportement de la solution de cette équation lorsque le paramètre ε tend vers zéro. Dans le cas où b est une fonction lipschitzienne, la théorie de Freidlin et Wentzell (*voir*, par exemple [5], chapitre 5.6 de [3], chapitre 1.4 de [4], paragraphe 6 de [9]) a montré que la solution converge uniformément sur $[0,T]$ vers l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases}x'(t)=b(x(t)),\\ x(0)=0.\end{cases}\tag{2}$$

De plus, la vitesse de convergence est connue : X^ε suit un principe de grandes déviations dans l'ensemble des fonctions continues, muni de norme uniforme, $(\mathcal{C}([0,T]),\|\cdot\|_\infty)$, de vitesse ε^2 et de fonctionnelle d'action :

$$I_T(f)=\begin{cases}\dfrac12\displaystyle\int_0^T\big|f'(t)-b\big(f(t)\big)\big|^2\,\mathrm{d}t & \text{si } f\in\mathrm{H}^1,\\ \infty & \text{sinon,}\end{cases}\tag{3}$$

où H^1 désigne l'espace de Cameron–Martin, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[0,T]$. Nous avons récemment étudié, dans [6], le cas où b n'est pas lipschitzien, en considérant un cas particulier pour lequel le système dynamique (2) admet une infinité de solutions partant de l'origine et s'exprimant toutes en fonction de la primitive de l'inverse de b (phénomène de Peano). Nous prendrons $b(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^\gamma$, avec $0 < \gamma < 1$. Dans ce cas, la loi de la solution P^ε converge étroitement vers $\frac{1}{2}\,\delta_{\rho_1} + \frac{1}{2}\,\delta_{\rho_2}$, où ρ_1 et ρ_2 sont les solutions extrémales du système (2), c'est-à-dire les solutions qui quittent en premier l'origine (*voir* [1]). Nous avons donné une vitesse de convergence en étudiant la densité $p_t^\varepsilon(x)$ de la solution X_t^ε par rapport à la mesure de Lebesgue, et en mettant en lumière un comportement dépendant fortement de la position du couple (t,x). Le but de cette Note est de présenter une généralisation de ce résultat.

2. Résultats

Considérons une fonction b vérifiant les hypothèses :

(H1) b est une fonction continue impaire croissante, $b' \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$ et b^{-1} est intégrable au voisinage de 0 ;

(H2) il existe $0<\gamma<1$ et $C>0$ tels que $b'(x) \sim C\,\gamma\,|x|^{\gamma-1}$ au voisinage de l'origine.

Sous les conditions de continuité de b, la famille $\{P^\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$ des lois de X^ε est étroitement relativement compacte. De plus, grâce à (H1), il existe une unique valeur d'adhérence dont le support est contenu dans l'ensemble des trajectoires des solutions extrémales de (2). Rappelons que $p_t^\varepsilon(x)$ est la densité de X_t^ε et notons $K(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{b(y)}$ et K^{-1} sa fonction réciproque. Nous obtenons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, nous avons les résultats suivants* :

– *si le point (t,x) est tel que $|x| > K^{-1}(t)$, alors il existe une fonction strictement positive k_t telle que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log p_t^\varepsilon(x) = -k_t\big(|x|\big);$$

– *si $|x| < K^{-1}(t)$, c'est-à-dire si (t,x) se trouve entre les trajectoires extrémales, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \log p_t^\varepsilon(x) = \lambda_1\big(K\big(|x|\big) - t\big), \tag{4}$$

où λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger :

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{C\,\gamma}{2|x|^{1-\gamma}} + \frac{C^2|x|^{2\gamma}}{2}. \tag{5}$$

Qui plus est, nous obtenons un principe de grandes déviations :

THÉORÈME 2.2. – *Soit b une fonction bornée, strictement croissante et vérifiant* (H1) *et* (H2)*, alors X^ε suit un principe de grandes déviations dans $(\mathcal{C}([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$, de vitesse ε^2 avec la bonne fonctionnelle d'action définie par* (3)*.*

Comme la fonctionnelle d'action s'annule sur l'ensemble des solutions du système dynamique (2), ce théorème ne donne aucune information sur le comportement de la diffusion au voisinage d'une solution de (2). Nous montrons alors le résultat suivant pour compléter l'étude :

THÉORÈME 2.3. – *Soit φ une solution non extrémale du système dynamique, alors pour $0<\delta<K^{-1}(T) - |\varphi(T)|$ nous obtenons*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \log \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \big|X_t^\varepsilon - \varphi(t)\big| \leqslant \delta\Big) = \lambda_1\big(K\big(\big|\varphi(T)\big| + \delta\big) - T\big). \tag{6}$$

3. Idées de démonstration pour la convergence de la densité

Dans ce paragraphe, nous exposons les idées utiles pour généraliser la démonstration développée dans [6]. La première partie du théorème 2.1 s'obtient assez aisément, c'est pourquoi nous nous attachons à ne donner des informations que sur la seconde partie. Pour cela notons

$$s(\varepsilon)=\varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \quad \text{et} \quad u^\varepsilon(t,x)=-s(\varepsilon)\log p_t^\varepsilon(x).$$

Comme la densité est une fonction paire, il suffit d'étudier le cas $x \geqslant 0$. Nous montrons que u^ε est une solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}+H_\varepsilon\left(x,u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}\right)=0 \quad \text{sur } \Omega^\varepsilon,$$

où l'Hamiltonien est défini par :

$$H_\varepsilon(x,u,p,q):=-\frac{\varepsilon^2}{2}\,q+\frac{\varepsilon^2}{2s(\varepsilon)}\,p^2+b(x)p-b'(x)s(\varepsilon),$$

et le domaine $\Omega^\varepsilon=\{(t,x): K(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2})<t\leqslant T,\ \varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}<x<K^{-1}(t)\}$. De plus, nous connaissons le comportement de la solution u^ε sur une partie de la frontière du domaine. En effet, nous avons le résultat suivant :

LEMME 3.1. – *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour* $t>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\log p_t^\varepsilon\big(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}\big)=-\lambda_1 t,$$

où λ_1 *est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger lié au potentiel*

$$V(x):=\frac{C\gamma}{|x|^{1-\gamma}}+C^2|x|^{2\gamma}. \tag{7}$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$.

Avant de démontrer ce résultat, terminons les grandes lignes de la démonstration du théorème 2.1. Par passage à la limite lorsque le paramètre ε tend vers zéro, nous obtenons, par des résultats de stabilité des solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi, que la limite supérieure de u^ε et la limite inférieure sont sous-solution et sur-solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+b(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=0 \quad \text{sur } \Omega,$$

où $\Omega=\{(t,x):\ 0<t\leqslant T,\ 0<x<K^{-1}(t)\}$. De plus, d'après le lemme 3.1, ces deux solutions coïncident sur la frontière $\{0<t<T,\ x=0\}$ ce qui implique, par un résultat d'unicité, que la limite supérieure est égale à la limite inférieure sur Ω. La limite de u^ε est donc égale à l'unique solution $\lambda_1(t-K(x))$ ce qui implique la seconde partie du théorème 2.1 (pour plus d'informations sur les solutions de viscosités, voir [2]). Par ailleurs, forts de ce résultat, nous pouvons alors montrer que la convergence de u^ε vers sa limite est uniforme sur tout compact de Ω.

Démonstration du lemme 3.1. – La preuve repose sur un argument d'encadrement. En utilisant les formules de Girsanov et d'Itô–Tanaka, nous obtenons une expression de la densité p_t^ε :

$$p_t^\varepsilon\big(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}\big)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{\frac{G(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2})}{\varepsilon^2}-\frac{s(\varepsilon)}{2t}\right\}\times\mathbb{E}\left[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{V}(B_s)\,\mathrm{d}s \,\middle|\, B_t=s(\varepsilon)^{1/2}\right],$$

où G est la primitive de b nulle à l'origine et $\widetilde{V}(x)=b'(\varepsilon x)+b^2(\varepsilon x)/\varepsilon^2$. Or comme $b'(x)\sim C\,\gamma\,|x|^{\gamma-1}$ au voisinage de 0 et que $b(0)=0$, il existe $\eta>0$ et deux constantes $C_1\leqslant 1$, $C_2\geqslant 1$ proches de 1 telles que, pour $|\varepsilon x| \leqslant \eta$,

$$\frac{C\,C_1^{1+\gamma}\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + C^2 C_1^{2+2\gamma}\frac{|x|^{2\gamma}}{\varepsilon^2} \leqslant \widetilde{V}(x) \leqslant \frac{C\,C_2^{1+\gamma}\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + C^2 C_2^{2+2\gamma}\frac{|x|^{2\gamma}}{\varepsilon^2}.$$

Comme cette comparaison a lieu au voisinage de l'origine, nous sommes amenés à introduire l'expression $\chi\big(\sup_{t\in[0,T]}|\varepsilon B_t| \leqslant \eta\big)$ (où χ est la fonction caractéristique) sous l'espérance. Nous montrons alors, grâce aux grandes déviations du pont brownien, que la limite ne change pas, si on remplace

$$\exp\bigg(-\frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{V}(B_s)\,\mathrm{d}s\bigg) \quad \text{par} \quad \chi\Big(\sup_{t\in[0,T]}|\varepsilon B_t| \leqslant \eta\Big)\exp\bigg(-\frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{V}(B_s)\,\mathrm{d}s\bigg),$$

sous l'espérance conditionnelle dans l'expression de $p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2})$. Ainsi,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\log p_t^\varepsilon(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\log \mathbb{E}\bigg[\exp -\frac{1}{2}\int_0^t C_1^2 V(C_1 B_s)\,\mathrm{d}s \,\bigg|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2}\bigg].$$

Nous obtenons la minoration en remplaçant C_1 par C_2 et $\limsup$ par $\liminf$. Par ailleurs, par une démonstration identique à celle de la proposition 5 dans [6], nous obtenons la décomposition sous forme de série, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}}\exp\bigg(-\frac{s(\varepsilon)}{2t}\bigg)\mathbb{E}\bigg[\exp\bigg(-\frac{1}{2}\int_0^t C_i^2 V(C_i B_s)\,\mathrm{d}s\bigg) \,\bigg|\, B_t = s(\varepsilon)^{1/2}\bigg] \\ &\quad = \frac{C_i^2}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}}\sum_{j=1}^\infty \exp\bigg(-\frac{C_i^2\lambda_j t}{s(\varepsilon)}\bigg)\psi_j(0)\psi_j(C_i), \end{aligned}$$

où λ_j et ψ_j sont les valeurs propres et les fonctions propres normalisées dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de l'équation

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_j(x) + \frac{1}{2}V(x)\psi_j(x) = \lambda_j\psi_j(x),$$

avec V défini par (7). Nous en déduisons alors

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\log p_t^\varepsilon\big(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}\big) \leqslant -C_1^2\lambda_1 t \quad \text{et} \quad \liminf_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\log p_t^\varepsilon\big(\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}\big) \geqslant -C_2^2\lambda_1 t.$$

En faisant tendre les deux constantes vers 1, nous obtenons le résultat du lemme. La convergence uniforme provient de la convergence uniforme de la proposition 5 dans [6], puisque nous avons raisonné par encadrement.

4. Idées de démonstration du principe de grandes déviations

Pour démontrer le théorème 2.2, nous utilisons des raisonnements comparables aux raisonnements classiques de la théorie des grandes déviations (*voir*, par exemple, la très intéressante discussion informelle de G. Jona-Lasinio [8] pour la minoration dans les inégalités de grandes déviations et, [7] pour plus d'informations et la preuve complète du théorème 2.2). Ce qui est primordial dans ce résultat, c'est que I_T définie par (3) est une bonne fonctionnelle d'action, grâce à la bornitude de b. Démontrons maintenant le théorème 2.3.

Démonstration du théorème 2.3. – Soit φ une solution du système (2), telle que $K^{-1}(T) - |\varphi(T)| > 0$, où K^{-1} est la fonction réciproque de $\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{b(y)}$ et soit $0 < \delta < K^{-1}(T) - |\varphi(T)|$.

(i) Considérons alors l'ensemble suivant, pour $0 < \eta < \delta$:

$$\Gamma = \Big\{ f \in \mathcal{C}\big([0,T]\big) \;\Big|\; \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - \varphi(t)| \geqslant \delta \Big\} \cap \big\{ f \in \mathcal{C}\big([0,T]\big) \mid f(T) \in \big[\varphi(T) - \delta + \eta, \varphi(T) + \delta - \eta\big] \big\};$$

Γ est un ensemble fermé pour la topologie uniforme. Ainsi, puisque I_T est une bonne fonctionnelle d'action (théorème 2.2), son minimum sur Γ est atteint en une certaine fonction $f_0 \in \mathrm{H}^1 \cap \Gamma$. Supposons que ce minimum est nul, alors f_0 est une solution du système dynamique (2). De plus, $f_0(T) \in [\varphi(T) - \delta + \eta, \varphi(T) + \delta - \eta]$ puisque $f_0 \in \Gamma$. Nous en déduisons donc que $|f_0(t) - \varphi(t)| < \delta$ pour tout $t \leqslant T$. En effet, $|f_0(t) - \varphi(t)|$ est une fonction strictement croissante pour f_0 différente de φ car b est une fonction strictement croissante. Il apparaît alors une absurdité : f_0 ne peut pas appartenir à Γ. Nous en déduisons donc que $\inf_{f\in\Gamma} I_T(f) > 0$.

(ii) En utilisant l'inégalité

$$\mathbb{P}\Big(\big\{ \big|X_T^\varepsilon - \varphi(T)\big| \leqslant \delta \big\} \cap \Big\{ \sup_{t\in[0,T]} \big|X_t^\varepsilon - \varphi(t)\big| > \delta \Big\} \Big) \leqslant \mathbb{P}\big(X^\varepsilon \in \Gamma\big) \mathbb{P}\big(\big|X_T^\varepsilon - \varphi(T)\big| \in]\delta - \eta, \delta] \big),$$

nous déduisons par (i) et par le principe de grandes déviations (théorème 2.2) en choisissant η assez petit :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \log \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \big|X_t^\varepsilon - \varphi(t)\big| \leqslant \delta \Big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)} \log \mathbb{P}\big(\big|X_T^\varepsilon - \varphi(T)\big| \leqslant \delta \big).$$

Considérons tout d'abord un premier cas : la boule uniforme $\overline{\mathrm{B}(\varphi, \delta)}$ ne contient pas la fonction identiquement nulle. Alors, comme la densité de la diffusion vérifie (4) et comme cette convergence est uniforme sur tout compact de $\{T\} \times \big\{] - K^{-1}(T), 0[\cup]0, K^{-1}(T)[\big\}$, nous obtenons (6).

Dans le second cas, c'est-à-dire si $\overline{\mathrm{B}(\varphi, \delta)}$ contient la fonction identiquement nulle, il suffit d'enlever un voisinage $\mathrm{B}(0, \eta)$, d'appliquer le raisonnement précédent, puis de faire tendre η vers zéro. Nous obtenons alors (6) par un argument de monotonie.

Références bibliographiques

[1] Bafico R., Baldi P., Small random perturbations of Peano phenomena, Stochastics 6 (1982) 279–292.

[2] Barles G., Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi, Springer-Verlag, 1994.

[3] Dembo A., Zeitouni O., Large Deviations Techniques and Applications, Jones and Barlett Books in Mathematics, 1993.

[4] Deuschel J.D., Stroock D.W., Large Deviations, Academic Press, 1989.

[5] Freidlin M.I., Wentzell A.D., Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 1968.

[6] Gradinaru M., Herrmann S., Roynette B., A singular large deviations phenomenon, Ann. Inst. Henri-Poincaré (à paraître).

[7] Herrmann S., Thèse de doctorat, Institut Élie-Cartan, Nancy (à paraître).

[8] Jona-Lasinio G., Large deviations for weak solutions of stochastic differential equations, in: Ideas and Methods in Mathematical Analysis, Stochastics, and Applications (Oslo, 1988), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, pp. 162–167.

[9] Varadhan S.R.S., Large deviations and applications, in: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 46, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1984.