Indice de Quételet et Syndrôme de Turner.

On a mesuré l'indice de Quételet X chez 95 jeunes filles âgées de 14 ans, atteintes du syndrôme de Turner. Les résultats sont les suivants:

X	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26
effectif	5	7	21	42	12	5	3

On suppose que l'indice de Quételet d'une personne prise au hasard suit une loi normale.

1. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de l'indice de Quételet X sur cet échantillon.
   La moyenne est égale à $m_e = 18{,}6$, l'écart-type $s_e = 2{,}5064$ et la variance $s_e^2 = 6{,}2820$.
2. Tester si l'écart-type de l'indice de Quételet chez les jeunes filles atteintes du syndrôme de Turner est supérieur à 2,5.
   Les **hypothèses** sont (H_0) $s = 2{,}5$ et (H_1) $s > 2{,}5$ où s est l'écart-type de l'indice de Quételet chez les jeunes filles atteintes du syndrôme de Turner.
   Modèle statistique : On suppose la normalité de l'indice de Quételet, alors sous $(H-0)$,
   $$Y_n = \frac{nS_n^2}{s_0^2} \sim \chi^2(94)$$
   où S_n est l'écart-type aléatoire mesuré sur un échantillon de taille 95 choisi au hasard.
   Région de rejet : avec un niveau de risque $\alpha = 0.05$, la région de rejet est
   $$K_\alpha = \{Y_n \geq y_\alpha\}$$
   où $113{,}1 \leq y_\alpha \leq 124{,}3$ d'après la table de la loi de Khi-Deux à 94 ddl.
   Décision :
   $$Y_n^e = \frac{95 \times (2{,}5064)^2}{(2{,}5)^2} = 95{,}49 \notin K_\alpha(Y).$$
   Avec une confiance de 95%, on peut dire que l'écart-type n'est pas significativement supérieur à 2,5.
3. Sachant que l'indice moyen de référence pour des jeunes filles du même âge est de 19.40, peut-on conclure que l'indice de Quételet moyen des jeunes filles atteintes du syndrôme de Turner est identique à l'indice moyen de référence ?
   Les **hypothèses** sont (H_0) $m = 19{,}40$ et (H_1) $m \neq 19{,}40$ où m est l'indice moyen de Quételet chez les jeunes filles atteintes du syndrôme de Turner.
   Modèle statistique : La taille de l'échantillon est grande $(n = 95 \geq 30)$, alors sous (H_0),
   $$M_n \sim \mathcal{N}(19{,}40; \frac{s_e}{\sqrt{n-1}}) = \mathcal{N}(19{,}40; \frac{2{,}5064}{\sqrt{94}}) = \mathcal{N}(19{,}40; 0{,}2585)$$
   où M_n est l'indice moyen aléatoire mesuré sur un échantillon de taille 95 choisi au hasard.
   Région de rejet : avec un niveau de risque $\alpha = 0.05$, la région de rejet est
   $$K_\alpha(M_n) = \{M_n \leq 18{,}8933\} \cup \{M_n \geq 19{,}9067\}$$
   Décision :
   $$m_e = 18{,}6 \in K_\alpha(M_n).$$
   Avec une confiance de 95%, on peut dire que la moyenne de l'indice de Quételet des jeunes filles atteintes du syndrôme de Turner est significativement différente de l'indice moyen de référence 19,40.