

durée du test: 30 min

(*extrait "Le Monde" 2014*). Les adolescents connaissent, en France, un mal-être dont l'ampleur frappe l'Unicef. Pour la deuxième année consécutive, le Fonds des Nations unies pour l'enfance a mené partout en France, au printemps, une vaste étude, qui fait l'objet d'un rapport remis au gouvernement (...). Parmi les personnes interrogées, les adolescents ont évoqué leur quotidien, mais aussi leurs peines, leurs idées suicidaires et conduites addictives, «d'une ampleur inquiétante», selon l'Unicef. D'après l'étude 43% des jeunes de 15 ans et plus seraient ainsi en «situation de souffrance psychologique».

Question 1: Nous cherchons à savoir si la situation matérielle des familles, comme l'indique le rapport, a un lien avec ce mal-être adolescent. Pour cela, nous considérons un échantillon de 13 adolescents qui se trouvent en *situation de privation matérielle*. Parmi ces adolescents, 7 ont été reconnus être en souffrance psychologique.

1. Peut-on conclure avec un risque inférieur à 5% que la privation matérielle augmente le mal-être des adolescents ?
2. Quelle est la p-value de ce test ?
3. Calculer la puissance $\eta(0,6)$ du test.

Solution :

1. Hypothèses (2 points):
(H_0) la privation matérielle n'augmente pas le mal-être des adolescents $p = 0.43$
(H_1) la privation matérielle augmente le mal-être des adolescents $p > 0.43$.
Ici p est la probabilité pour qu'un adolescent en situation de privation matérielle, tiré au hasard, soit en souffrance psychologique.
2. Modèle statistique (1 point): soit X_{13} le nombre d'ados dans l'échantillon de personnes en situation de privation matérielle qui sont en souffrance psychologique. Sous (H_0), la variable X_{13} suit une loi binômiale $\mathcal{B}(13; 0,43)$.
3. Pour un risque $\alpha = 0.05$ (0,5 pt) nous calculons la région de rejet (2 points):

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(X_{13} \leq 9) = 1 - 0,9859 = 0,0141 < 0,05$$

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 9) = 1 - \mathbb{P}(X_{13} \leq 8) = 1 - 0,9480 = 0,0520 > 0,05$$

La région de rejet est alors

$$K_{0.05} = \{X_{13} \geq 10\} = \{10, 11, 12, 13\}.$$

4. Décision (1 pt): la valeur de l'expérience est $X_{13}^e = 7 \notin K_{0.05}$ donc on ne rejette pas (H_0): on ne peut pas assurer que la privation matérielle ait une influence négative sur le mal-être des adolescents.
5. Signification du test (1,5 point): calcul de la p-value.

$$p\text{-value} = \mathbb{P}(X_{13} \geq X_{13}^e) = \mathbb{P}(X_{13} \geq 7) \approx 0.3025$$

La valeur a été calculée dans la question 3. On obtient donc une p-value de 30,25%. Avec un niveau de risque supérieur à 30,25% on rejette (H_0) tandis qu'avec un niveau de risque inférieur à 30,25% on ne rejette pas (H_0).

6. puissance (2 points) $\eta(0, 6)$.

$$\eta(0, 6) = \mathbb{P}(\text{accepter } (H_1) \mid p = 0, 6) = \mathbb{P}(X_{13} \geq 10 \mid p = 0, 6)$$

où $X_{13} \sim \mathcal{B}(13; 0, 6)$. On obtient:

$$\eta(0, 6) = 1 - 0,8314 = 0,1686$$