Université de Bourgogne 2015-2016 Analyse

durée de l'examen: 2h

- *La calculatrice et les notes de cours ne sont pas autorisées. Le barème est indicatif.*

Exercice 1. (Intégrales généralisées - 3,5 points)
On considère la fonction définie sur l'intervalle $I = [5, +\infty[$ par

$$f(x) = \exp(-\sqrt{x^2 - 3x - 5}).$$

1. Montrer que f est continue sur l'intervalle I.
2. Déterminer un équivalent de la fonction f lorsque $x \to \infty$.
3. En déduire que l'intégrale suivante converge:
$$\int_5^\infty \exp(-\sqrt{x^2 - 3x - 5})\, dx.$$
4. Etudier la nature de l'intégrale suivante (convergente ou divergente):
$$\int_5^\infty \exp(-\sqrt{x^2 - 3x - 5}) \sin(x)\, dx$$

Eléments de solution:

1. La fonction $h(x) = x^2 - 3x - 5$ est un trinôme du second degré qui ne prend que des valeurs positives sur l'intervalle I, de plus $h : I \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue car c'est un polynôme en x. Par la suite on compose la fonction exponentielle (continue), la fonction racine carrée (continue sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction h pour obtenir une fonction continue.
2. La fonction f satisfait:
$$f(x) \sim e^{3/2} e^{-x}, \quad \text{quand } x \to \infty.$$
3. La fonction est continue sur $[5, +\infty[$ il s'agit donc de montrer que f est intégrable en $+\infty$. Or f est positive et equivalente à une fonction dont l'intégrale converge (fonction exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = -1 < 0$). Ainsi par comparaison l'intégrale de f est convergente.
4. $g(x) = \exp(-\sqrt{x^2 - 3x - 5}) \sin(x)$ satisfait $|g(x)| \leq f(x)$. Or l'intégrale de f est convergente ainsi l'intégrale de g est absolument convergente donc convergente.

Exercice 2. (Série de fonctions - 3,5 points) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x + 2^n}.$$

1. Montrer que la série $f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Calculer $f'(0)$.

Eléments de solution:

1. Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0$ pour tout n. La série est alors convergente et vaut 0. Si $x \neq 0$ alors
$$f_n(x) \sim \frac{x}{2^n}$$
lorsque n tend vers l'infini. Or $\frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente donc la série de terme $f_n(x)$ converge sumplement par comparaison.

2. La série f converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ par ailleurs f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. En effet
$$f_n'(x) = \frac{2^n}{(x+2^n)^2}$$
est continue sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit donc de montrer que la série de terme général f_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Or
$$a_n = \sup_{x\geq 0}\left|\frac{2^n}{(x+2^n)^2}\right| = \frac{1}{2^n}$$
est le terme général d'une série convergente. Ainsi la série des termes f_n' converge normalement et donc uniformément. Tous les arguments sont réunis pour que f soit dérivable.

3. $$f'(0) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Exercice 3. (Questions diverses - 2,5 points) Vrai ou faux, sans justification.

1. Une intégrale généralisée convergente converge absolument.

   ○ vrai ⊗ faux

2. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé

   ⊗ vrai ○ faux

3. Un ensemble est soit ouvert soit fermé

   ○ vrai ⊗ faux

4. Une série de fonctions $f_n(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, est une série qui converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   ○ vrai ⊗ faux

5. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

   $\otimes$ vrai ○ faux

6. Un ensemble fermé borné est un ensemble compact

   ○ vrai $\otimes$ faux

Exercice 4. (Espace vectoriel normé - 5 points)
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$N(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$$

1. Montrer que N est une norme.
2. Trouver une constante $C > 0$ telle que $N(x,y) \leq CN_1(x,y)$ où $N_1(x,y) = |x| + |y|$.
3. Les normes N et N_1 sont-elles équivalentes ? Argumenter.
4. Dessiner la boule ouverte de centre $(1,0)$ et de rayon 1 associée à la norme N.
5. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{tels que } |x| \leq 2\}$ est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme N ? est-il ouvert ? est-il compact ? Même question pour l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{tels que } |x| + 2|y| \leq 2\}$.

Eléments de solution:

1. Il faut montrer que N est positive, que $N(x,y) = 0$ implique $x = y = 0$, que N est homogène et que N satisfait l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité triangulaire, il suffit de remarquer que $N(x,y) = N_2(x, 2y)$ où $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est une norme définie en cours. L'inégalité triangulaire de la norme N_2 permet très facilement d'obtenir l'inégalité triangulaire pour la norme N:

$$\begin{aligned} N(x_1+x_2, y_1+y_2) &= N_2(x_1+x_2, 2y_1+2y_2) \leq N_2(x_1, 2y_1) + N_2(x_2, 2y_2) \\ &= N(x_1,y_1) + N(x_2,y_2). \end{aligned}$$

2. On observe que

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \sqrt{x^2+4y^2} \leq \sqrt{4x^2+4y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{|x|^2+|y|^2+2|x||y|} \\ &= 2\sqrt{(|x|+|y|)^2} = 2N_1(x,y). \end{aligned}$$

3. Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
4. Dessin de la boule ouverte.

5. On note $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{tels que } |x| \leq 2\}$. Montrons que E est fermé: soit $(x_n, y_n) \in E$ une suite convergent vers (x,y). Alors $|x_n| \leq 2$ pour tout n et donc, par passage à la limite, $|x| \leq 2$. Ainsi la limite $(x,y) \in E$ ce qui implique que E est fermé. E n'est pas ouvert, en effet $(2,0) \in E$ mais aucune boule ouverte centrée en $(2,0)$ n'est incluse dans E. Par ailleurs E est non borné car $(0,y) \in E$ pour tout y et $N(0,y) = 2|y|$ peut devenir aussi grand que souhaité en faisant un choix judicieux de y. Il s'ensuit que E n'est pas compact car il n'est pas à la fois fermé et borné. Pour l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{tels que } |x| + 2|y| \leq 2\}$ un raisonnement similaire permet de conclure que l'ensemble est fermé, non ouvert, borné et donc compact.

Exercice 5. (Fonctions à plusieurs variables - 5,5 points)
On considère l'application suivante définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - (x+y)^4.$$

1. Calculer le gradient de f et les points qui annulent ce gradient (points critiques).

2. La fonction f est-elle différentiable ? Si oui, déterminer sa différentielle.

3. Calculer la matrice hessienne de f.

4. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe e^{-x}. Calculer directement, puis en utilisant les dérivées partielles de f, la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x, g(x))$.

5. Pour chacun des points critiques de f, dire s'il s'agit d'un maximum local, minimum local ou point selle (col).

6. La fonction admet-elle un minimum global ? un maximum global ?

Eléments de solution:

1. On obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x - 4(x+y)^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y - 4(x+y)^3$. Les points annulant le gradient sont donc: $(0,0)$, $(1/2, 1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$.

2. Les dérivées partielles sont continues, et s'ensuit que f est différentiable et sa différentielle au point (x,y) est donnée par:
$$Df_{(x,y)}(h,k) = (8x - 4(x+y)^3)h + (8y - 4(x+y)^3)k.$$

3. La matrice hessienne est:
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 8 - 12(x+y)^2 & -12(x+y)^2 \\ -12(x+y)^2 & 8 - 12(x+y)^2 \end{pmatrix}$$

4. On définit la fonction $h(x) = f(x, e^{-x}) = 4x^2 + 4e^{-2x} - (x + e^{-x})^4$. On calcule directement la dérivée de h et on obtient:
$$h'(x) = 8x - 8e^{-2x} - 4(x + e^{-x})^3(1 - e^{-x}).$$
L'autre façon est d'obtenir cette dérivée par composition:
$$h'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, e^{-x}) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} e^{-x}.$$

5. Description des points critiques: pour $(0,0)$ on obtient la hessienne

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

dont les deux valeurs propres sont positives: il s'agit d'un minimum local. Pour les autres points en calculant la Hessienne on observe qu'il s'agit de points selles.

6. En choisissant $x = y$ et en faisant tendre x vers l'infini, on obtient:

$$\lim_{x\to\infty} f(x,x) = \lim_{x\to\infty} 8x^2 - 8x^4 = -\infty.$$

Par ailleurs, en choisissant $x = -y$ et en faisant tendre x vers l'infini:

$$\lim_{x\to\infty} f(x,-x) = \lim_{x\to\infty} 8x^2 = +\infty.$$

Il n'existe donc ni minimum global ni maximum global.