**Université de Bourgogne 2015-2016 Analyse**

**durée de l'examen: 1h30**

- *La calculatrice et les notes de cours ne sont pas autorisées.*

**Exercice 1. (Intégrale généralisée)**

1. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})\,dx$$

Corrigé: $f(x) = x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est une fonction positive continue sur $\mathbb{R}_+$. Il s'agit donc de déterminer si $f$ est intégrable au *voisinage de l'infini.* En utilisant la quantité conjuguée, on obtient

$$f(x) = \frac{(x+2)^2-(x^2+4x+1)}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} = \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim \frac{3}{2x},$$

lorsque $x$ tend vers l'infini. Ainsi $f$ est positive et équivalente à une fonction $g(x) = \frac{3}{2x}$ qui est du type Riemann et dont l'intégrale diverge. Par comparaison, on obtient donc la divergence de l'intégrale étudiée.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\,dx.$$

Corrigé: cette intégrale est indéterminée en 0 et en 1. La fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est positive et par ailleurs, on a les équivalents suivants:
- en 0:

$$g(x) \sim x^{-2/3}$$

qui est une fonction de type Riemann et dont intégrale au voisinage de 0 converge.
- en 1:

$$g(x) \sim (1-x)^{-1/3}$$

qui est une fonction de type Riemann et dont intégrale au voisinage de 1 converge. On en déduit donc que $g$ est intégrable sur $[0,1]$.

2. Soit

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}.$$

Montrer que $I(\lambda)$ converge pour tout réel $\lambda$ et calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $t = 1/x$.
Corrigé: la fonction $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ peut être prolongée en continue sur $\mathbb{R}$ si $\lambda \geq 0$ et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 0$ pour $\lambda < 0$. Le problème se trouve donc à l'infini. La fonction $f$ est positive et par ailleurs:

$$f(x) \sim x^{-2-\lambda} \quad \text{si } \lambda \geq 0 \quad \text{et sinon } f(x) \sim x^{-2}.$$

Dans les deux cas, la fonction est positive et équivalente à une autre fonction de type Riemann dont l'intégrale converge. On en déduit donc que $I(\lambda)$ converge pour tout $\lambda$.
Calcul de l'intégrale: par changement de variable, on obtient

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2(1+1/t^2)(1+(1/t)^\lambda)}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^\lambda}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}\,dt.$$

On observe alors en faisant la somme des deux expressions de $I(\lambda)$ que l'on obtient:

$$2I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit $I(\lambda) = \frac{\pi}{4}$.

**Exercice 2. (Suite de fonctions)**
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, et soit $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^3 + a}{nx^2 + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble des nombres $a$ pour lesquels la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
   On s'intéresse tout d'abord à la convergence simple. Pour $x \neq 0$ on a

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^3+a}{nx^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3 + a/n}{x^2 + 1/n} = x.$$

   Pour $x = 0$ on a $f_n(0) = a$ pour tout $n \geq 0$, ce qui signifie que $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = a$. $f_n$ converge donc simplement vers la fonction $f$ définie par

   $$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 0 \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

   La fonction $f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, si elle converge uniformément vers $f$ alors $f$ est aussi continue ce qui implique que $a = 0$. Montrons la réciproque: si $a = 0$ alors $f_n$ converge uniformément. On a

   $$M_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - x| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{nx^2+1} \right|.$$

   Le maximum est atteint pour $x = 1/\sqrt{n}$ (étude des variations de la fonction). Ainsi

   $$M_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

   lorsque $n \to \infty$. La convergence est donc uniforme si et seulement si $a = 0$.

2. En déduire que la suite

   $$\left( \int_0^1 \frac{nx^3}{nx^2+1} \right)_{n\geq 0}$$

converge et calculer sa limite. Nous sommes dans la situation où la convergence est uniforme ($a = 0$). La convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence sur tout intervalle plus petit et donc sur $[0,1]$. De plus la convergence uniforme entraîne la convergence des intégrales, on en déduit:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{nx^2+1} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 3. (Série de fonctions)**

Soit $a > 0$, et $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction $f_n(x)$ par $f_n(x) = x^a e^{-nx}$.

1. Calculer la somme $f(x)$ de la série de terme général $f_n(x)$.
Il s'agit d'une série géométrique. On obtient donc pour $x \neq 0$:
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) = x^a \sum_{n\geq 0} e^{-nx} = x^a \sum_{n\geq 0} (e^{-x})^n = \frac{x^a}{1-e^{-x}}$$
car $|e^{-x}| < 1$. Pour $x = 0$, on obtient $f(x) = 0$.

2. Montrer que la série de terme général $f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.
On considère $\alpha_n := \sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x>0} x^a e^{-nx}$. On obtient alors en étudiant les variations de la fonction que le maximum est atteint pour $x = a/n$. Ainsi
$$\alpha_n = f_n(a/n) = a^a e^{-a} \frac{1}{n^a}.$$
C'est donc équivalent au terme général d'une série de Riemann. Ainsi la série converge ssi $a > 1$.

3. Déterminer la limite en 0 de $f(x)$, et comparer cette limite à $f(0)$. Qu'en déduit-t-on pour la convergence uniforme de la série sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ? On étudie un équivalent de la fonction $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $O$:
$$\frac{x^a}{1-e^{-x}} \sim \frac{x^a}{x} \sim x^{a-1}.$$
La limite en 0 existe donc ssi $a \geq 1$. Si $a > 1$ alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et si $a = 1$ alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Ainsi $f(x)$ tend vers $f(0) = 0$ ssi $a > 1$. On en déduit en particulier que la convergence n'est pas uniforme pour $a \leq 1$ car la limite d'une suite de fonctions continues doit être continue dans le cadre de la convergence uniforme.

4. Montrer que la série de terme général $f_n$ converge uniformément sur $[s, +\infty[$ avec $s > 0$. Notons que nous $n$ suffisamment grand ($n > s/a$) la fonction $f_n$ est décroissante sur l'intervalle $[s, \infty[$. Ainsi
$$M_n = \sup_{x\geq s} \left| \sum_{k=n}^{\infty} x^a e^{-kx} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} s^a e^{-sk} = \frac{s^a e^{-ns}}{1-e^{-s}} \to 0$$
lorsque $n \to \infty$. On en déduit donc que la série de terme général $f_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[s, \infty[$.