Université de Bourgogne   2015-2016   Analyse

- *Une rédaction individuelle et soignée est exigée. La rédaction sera limitée à 5 pages.*

Exercice 1. On se donne un paramètre β réel et on construit la suite de fonctions, définie sur l'intervalle $[0,1]$ par
$$f_n(x) = n^\beta x e^{-nx}.$$

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de β pour lesquelles la suite de fonctions converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$.
3. Pour quelles valeurs de β a-t-on:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$
Y-a-t-il contradiction avec le résultat vu en cours ?

Exercice 2.
Dans tout ce texte, $(\beta_n)_n$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0,1[$ et pour tout $x \in I$; $f_n(x) = \beta_n x^n (1-x)$.

1. Justifier que la suite $(\beta_n)_n$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I.
2. Convergence normale.
   a) Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty := \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.
   b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_n}{n}$ converge.
3. Convergence uniforme.
   a) Calculer pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$.
   b) Si on suppose que la suite $(\beta_n)_n$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I.
   c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(\beta_n)_n$ converge vers 0.
4. Dans les cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\beta_n)_n$ telle que
   a) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I
   b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I
   c) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

Exercice 3.
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite convergeante de $\mathbb{R}^d$ et x sa limite. Montrer que $X = \{x\} \cup \{(x_n),\ n \geq 1\}$ est compact.